系 5.12. (i) f が m 回微分可能で $f^{(m)}$ が連続であれば、

$$f_n = o\left(\frac{1}{|n|^m}\right)$$

である。

(ii) f のフーリエ係数 f_n が

$$f_n = O\left(\frac{1}{|n|^{m+2}}\right)$$

をみたせば、f は m 階微分可能であり $f^{(m)}$ が連続である。

6 フーリエ変換と超関数

周期的でない関数は、周期が無限大であると思えば、そのフーリエ係数は、振動数 ξ の関数として、

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx$$

なるものを考えることに相当する。これを関数 f のフーリエ変換と称する。「無限大の周期」に相当して、振動数はすべての実数値を取り得るようになる。

これを解釈するために、いま十分大きな周期 $2L$ を考え、関数 $f(x)$ は、$[-L, L]$ 以外では 0 の値を取るものとする。（f の台が $[-L, L]$ に含まれる、といった言い方をする。）さて周期 2π の関数 F を

$$F(x) = f(\frac{L}{\pi}x), \qquad -\pi \le x \le \pi$$

であるように定めて、そのフーリエ係数を求めると、

$$\begin{aligned}
F_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)e^{-inx}\,dx \\
&= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(y)e^{-i\pi ny/L}\,dy \\
&= \frac{1}{2L}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\pi nx/L}\,dx
\end{aligned}$$

となる。

　そこで、$L \to \infty$ での情報を得るために、F_n の代わりに $2LF_n$ を考え、係数を表すパラメータを n から $\xi = \pi n/L$ に変更すれば、上で与えた f のフーリエ変換にたどり着く。

補題 6.1. f の台がコンパクトで、

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f^{(m)}(x)| dx < +\infty$$

ならば、$\widehat{f}$ は解析関数で

$$\widehat{f}(\xi) = O(1/|\xi|^m).$$

Proof. 台が区間 $[a, b]$ に含まれるとすると、

$$\widehat{f}(\xi) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-i)^n}{n!} \xi^n \int_a^b x^n f(x)\, dx$$

であり、この ξ の冪級数の収束半径は ∞ である。

　また、部分積分を繰り返して使うと、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(m)}(x) e^{-ix\xi} dx = (i\xi)^m \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

となるので、

$$|\xi|^m |\widehat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(m)}(x)| dx$$

である。 □

問 12. 上の証明の中で、収束半径の部分を詳しく計算（評価）する。

　フーリエ変換からもとの関数が復元される様子を調べるために、台がコンパクトで、２階の微分が連続である関数 f について考える。十分大きな周期 $2L > 0$ に対して、$f(x) = 0$ for $|x| \geq L$ であるから、$f|_{[-L,L]}$ を周期 $2L > 0$ の周期関数に直したものに、フーリエ展開公式を適用すると、

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} e^{i\pi n(x-y)/L} f(y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\pi}{L} e^{i\pi nx/L} \widehat{f}(\pi n/L)$$

となるので、$\widehat{f}$ は連続かつ $\widehat{f}(\xi) = O(1/|\xi|^2)$ に注意すれば、$L \to \infty$ のとき、上の和は、リーマン積分

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\widehat{f}(\xi)$$

に近づく。

さらに Parseval の等式は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\pi}{L}|\widehat{f}(\pi n/L)|^2$$

となって、これは $L \to \infty$ のとき、積分

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

に近づく。関数 $\widehat{f}(\xi)$ が二乗可積分であることに注意。

定理 6.2. 関数 $f(x)$ が、

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < +\infty, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty$$

であるとき、そのフーリエ変換 $\widehat{f}$ は連続かつ

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi < +\infty$$

であり、$f \mapsto \widehat{f}/\sqrt{2\pi}$ は、$L^2(\mathbb{R})$ から $L^2(\mathbb{R})$ へのユニタリー変換を定める。とくに、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} g(x) dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}(\xi)}\widehat{g}(\xi) d\xi$$

である。

さらに、逆変換の公式

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

が弱い意味で成り立つ。(Lebesgue 積分論を援用すれば、より強く、ほとんど全ての x で成り立つことがわかる。)

Proof. 任意の二乗可積分関数が、２階の微分が連続で台がコンパクトな関数で二乗平均近似できることに注意すればよい。 □

例題 6.3.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-ix\xi}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\xi^2/4a}.$$

左辺を $F(\xi)$ とおいて、微分方程式

$$\frac{dF}{d\xi} = -\frac{\xi}{2a}F$$

を導く。

問 13. 関数 f が実数値関数であるための必要十分条件は、

$$\overline{\widehat{f}(\xi)} = \widehat{f}(-\xi).$$

とくに、実数値関数 f に対して、$\widehat{f}$ は、$\widehat{f}(\xi)$ $(\xi \geq 0)$ で決まる。これをさらに情報を落として、$|\widehat{f}(\xi)|^2$ を $\xi > 0$ の関数として表示したものを Power spectrum という（のかな？）。

逆変換の公式をさらに解釈するために、

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} dyf(y)e^{i(x-y)\xi}$$

と書き直して、x と ξ の積分の順序を形式的に入れ替えると、

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(x-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\delta(y)dy,$$

なる関係式を得る。ここで、

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{ix\xi}$$

と形式的に定めた。上の式で $g(y) = f(-y)$ と置くと、

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\delta(y)dy = g(0)$$

が（少なくともなめらかで有界な台をもつ）任意の関数 $g(y)$ に対して成り立つことになる。

　このような関数 $\delta(y)$ は、非常に奇妙なものである。というのは、$g(y)$ として $y = a \neq 0$ の付近に台をもつものを取ると、

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} g(y)\delta(y) = 0 = g(0)$$

となることから、$\delta(a) = 0$ $(a \neq 0)$ でないといけないが、一方で、$g(y) = 1$ $(|y| \leq \epsilon)$ ととると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\delta(y)dy = g(0) = 1$$

であることから、$\delta(y)$ は $y = 0$ に 1 に相当する面積が集中していないといけない。

　このように、常識では理解し難いものではあるが、次のように、デルタ関数を通常の関数で近似することができる。

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\xi^2+ix\xi}d\xi = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}}e^{-x^2/4a}$$

で $a \to +0$ とする。あるいは、

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} d\xi e^{ix\xi} = \frac{\sin(ax)}{\pi x}$$

で $a \to +\infty$ とすると wild な近似デルタ関数となる。

　いずれにしても、$\delta(x)$ は、近似デルタ関数 $\varphi_a(x)$ の極限

$$\delta(x) = \lim_{a\to 0} \varphi_a(x)$$

として解釈される。ここで、近似デルタ関数 $\{\varphi_a\}$ の満たすべき要件としては、

(i) $\varphi_a(x)$ は通常の（それも何回でも微分できる）関数であり、

(ii) 滑らかで有界な台をもつ関数 $f(x)$ に対して、

$$\lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_a(x)\,dx = f(0)$$

が成り立つことである。

　近似デルタ関数（列）の極限として、デルタ関数を解釈することは、示唆的ではあるが、厳密さという観点からは、難点がある。

数学的に厳密な解釈（の一つ）は、次のようなものである。

超関数としての解釈

まず、通常の関数でもそうであるが、関数の個々の点での値を直接決定するのは、それほど現実的ではない。大事な点は、関数 f の個々の値 $f(x)$ よりも、適当ななめらかさを仮定した関数 g （センサーの感度分布を表現している）に対して、積分値

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

が、どのような値を取るかである。その意味で、関数 f のかわりに、

$$g \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(y)dx$$

なる線型汎関数を代用にするというアイデアが浮かぶ。

すなわち、デルタ関数 δ とは、

$$g \mapsto g(0)$$

なる線型汎関数を象徴的に積分表示したものと捉える。そのような立場に立てば、近似デルタ関数 φ_a の定める（積分による）線型汎関数を同一の記号で表して、

$$\varphi_a(g) = \int g(x)\varphi_a(x)dx$$

$$\delta = \lim_{a\to+0} \varphi_a$$

なる線型汎関数の等式として、正当化することができる。ただし、数学的な厳密化のためには、汎関数の解析学が必要となり結構な準備を要する。

デルタ関数を含む「超関数」のもう一つの（ある意味で究極の）正当化は、regularization の方法によるものである。これは、

$$\int_0^{\infty} e^{\pm ix\xi}d\xi$$

の超関数としての意味を与えるために、いったん

$$\int_0^{\infty} e^{\pm i(x\pm i\epsilon)\xi}d\xi, \epsilon > 0$$

で置き換えて計算した後、$\epsilon \to +0$ とするもので、

$$\int_0^\infty e^{\pm ix\xi} d\xi = \lim_{\epsilon \to +0} \frac{1}{\epsilon \mp ix} = \frac{\pm i}{x \pm i0}.$$

ここで、右辺の超関数は次のように計算する。

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x \pm i0} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x \pm i0}(f(x) - f(0) + f(0))\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x) - f(0)}{x}\,dx + f(0) \lim_{\epsilon \to +0} \lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} \frac{1}{x \pm i\epsilon}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x) - f(0)}{x}\,dx \mp \pi i f(0).\end{aligned}$$

ここで、

$$\left.\frac{f(x) - f(0)}{x}\right|_{x=0} = f'(x)$$

である。また、

$$2\pi\delta(x) = \frac{i}{x + i0} - \frac{i}{x - i0}$$

という関係式もわかるので、デルタ関数の分解をも与える。

このような計算方法は、実用数学でしばしば行われるが、その大きな問題点は、(i) このような regularization が常に可能か、(ii) また複数の regularization が考えられる場合、結果は、同一の超関数を定め得るか、である。これについては数学的説明（理論）が確立しているが、それなりに手間暇を必要とするので、ここではこれ以上深入りしない。L. Schwartz の distribution, I.M. Gelfand らの generalized function, 佐藤幹夫の hyperfunction など。

課題：超関数の微分はどのように定義すべきか考察し、公式

$$h' = \delta$$

を正当化せよ。ここで、

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

である。（h はステップ関数または Heaviside function と呼ばれる。）