を $y$ で次々に偏微分してみると、

$$\int xe^{-iyx}dx = \frac{ix}{y}e^{-iyx} + \frac{1}{y^2}e^{-iyx}$$
$$\int x^2e^{-iyx}dx = i\frac{x^2}{y}e^{-iyx} + \frac{2x}{y^2}e^{-iyx} - \frac{2i}{y^3}e^{-iyx}$$

などとなる。

これを使って、$x$, $x^2$ $(-\pi < x < \pi)$ のフーリエ係数を計算すると、それぞれ

$$\frac{i}{n}(-1)^n(n \neq 0), \qquad \frac{2}{n^2}(-1)^n(n \neq 0)$$

となる。さらに Parseval の等式を書き下せば、ゼータ関数の特殊値が得られる。

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$
$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

**問 10.** $x^2$ の場合を確かめる。また $x^3$ の計算から何が出て来るか？

# 5 収束定理

悪い連続関数の例としてカントール関数をフラクタル的に絵で説明。

区分的になめらかということ。

**補題 5.1.** 連続な周期関数 $f$ がほとんど全ての点で微分可能で、

$$\oint |f'(x)|^2\,dx < +\infty$$

をみたすとき、$f$ のフーリエ係数の和は絶対収束する。すなわち、

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n| < +\infty.$$

*Proof.* $f'$ のフーリエ係数を $f'_n$ で表せば、$f'$ が二乗積分可能であることから、

$$\sum_n |f'_n|^2 < +\infty$$

である。一方、$f$ の連続性に注意して部分積分を使えば、$f'_n = inf_n$ となるので、

$$\sum_n |f_n| = \sum_n \frac{1}{n}|f'_n| \leq \left(\sum_n \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \left(\sum_n |f'_n|^2\right)^{1/2} < +\infty$$

である。 □

**問 11.** 周期 $2\pi$ の周期関数 $f(x)$ を $f(x) = x$ $(-\pi < x < \pi)$ で定めるとき、上の補題の結論が成り立たない。証明のどの部分が破綻しているのか確認。

**定理 5.2 (一様収束定理).** 上の補題と同じ仮定の下に、

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{inx}$$

が $x$ について一様に成り立つ。

*Proof.* ポアソン核を使った一様近似定理

$$f(x) = \lim_{r\to 1-0} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n r^{|n|} e^{inx}$$

および上の補題から、

$$\left| f(x) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{inx} \right| \leq \left| f(x) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n r^{|n|} e^{inx} \right| + \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n|(1 - r^{|n|})$$

と評価すれば、よい。 □

**例題 5.3.** $f(x) = |x|$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$. 不定積分

$$\int x e^{-inx}\,dx = \frac{i}{n} x e^{-inx} + \frac{1}{n^2} e^{-inx}$$

を使って、

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| e^{-inx} dx = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \quad (n \neq 0)$$

と $f_0 = \pi/2$ より、

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n:\mathrm{odd}} \frac{1}{n^2} e^{inx} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos(3x) + \frac{1}{5^2}\cos(5x) + \dots\right).$$

**例題 5.4.** 連続な周期関数 $f(x) = |x|^\alpha$ $(-\pi \le x \le \pi)$ 、ただし $\alpha > 0$、に対して、

$$\oint |f'(x)|^2 dx = \begin{cases} \frac{2\alpha^2\pi^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} & \text{if } 2\alpha - 1 > 0, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

**Dirichlet 核と局所性の原理**

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^{n} f_k e^{ikx} &= \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \oint f(y) e^{ik(x-y)} dy \\ &= \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \oint f(x-y) e^{iky} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint f(x-y) D_n(y) dy. \end{aligned}$$

ここで、Dirichlet 核 $D_n(y)$ は、

$$D_n(y) = \sum_{k=-n}^{n} e^{iky} = e^{-iny} \sum_{k=0}^{2n} e^{iky} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})y}{\sin\frac{y}{2}}$$

で与えられる周期 $2\pi$ の解析関数である。

**命題 5.5 (Dirichlet 核の性質).**

(i) 任意の連続関数（二乗可積分関数でも良い）$f(x)$ と任意の $\delta > 0$ に対して、

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|x|\ge\delta} f(x) D_n(x)\, dx = 0.$$

(ii) すべての $n \ge 1$ に対して、

$$\oint D_n(x)\, dx = 2\pi.$$

*Proof.* (i) Dirichlet 核の $\sin(n+1/2)x$ の部分を、

$$e^{(n+1/2)x} - e^{-i(n+1/2)x} = 2i\sin(n+1/2)x$$

と書き直して高周波平均の公式を使えばよい。($|x| \ge \delta$ に限定しているので、$D_n$ の分母 $\sin(x/2)$ は 0 に近づかない。)

(ii) $\{e^{ikx}\}$ の直交性により、

$$\oint D_n(x)\,dx = \sum_{k=-n}^{n} \oint e^{-ikx}\,dx = 2\pi.$$

□

**補題 5.6 (局所性の原理 (principle of localization)).** 二乗可積分な周期関数 $f(x)$ に対して、$x=a$ の付近で

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} f_k e^{ikx}$$

であるかどうかは、$f$ の $x=a$ の付近での振る舞いだけで決まる。

より正確には、二乗可積分関数 $f(x), g(x)$ が $f(x)=g(x)$ $(|x-a|\le 2\delta)$ を満たせば、

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} (f_k - g_k)e^{ika} = 0$$

が $|x-a|\le\delta$ について一様に成り立つ。

*Proof.* 実際、$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと $h(x)=0$ $(|x-a|\le 2\delta)$ であり、問題にしている性質は、

$$\lim_{n\to\infty} \int (h(x-y)-h(x))D_n(y)dy = 0 \quad \text{uniformly for } |x-a|\le\delta$$

と同値になる。この左辺の積分を

$$\int_{|y|\ge\delta} (h(x-y)-h(x))D_n(y)dy + \int_{|y|\le\delta} (h(x-y)-h(x))D_n(y)dy$$

と分けると、仮定から後者の被積分関数は 0 であり、一方前者の積分値は、Dirichlet 核の「局在性」により、$n\to\infty$ のとき $|x-a|\le\delta$ に関して一様に 0 に近づく。 □

**例題 5.7.** 関数 $f(x)=x$ $(-\pi<x<\pi)$ の場合の計算。

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}dx = \frac{i(-1)^n}{n}, \qquad n\ne 0$$

と局所性の原理により、

$$x = \sum_{n\ne 0} \frac{i(-1)^n}{n}e^{inx} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin(nx),$$

が $-\pi < x < \pi$ で成り立つ。とくに、$x = \pi/2$ とおくと、

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

がわかる。また $x = \pm\pi$ において、

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} f_k e^{ikx} = 0$$

である。

**定理 5.8 (Dirichlet).** 有界な周期関数 $f$ のマイルドな不連続点 $x = a$ において、($x = a$ 付近の $x = a$ 以外の点で微分可能で導関数が二乗可積分)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} f_k e^{ika} = \frac{f(a+0) + f(a-0)}{2}$$

が成り立つ。

とくに、連続点においては、フーリエ級数は収束しその値は $f(a)$ に等しい。

*Proof.* まず、$x = a$ で左右の極限が存在することが、$f'$ が $x = a$ の付近で可積分であることからわかる。

平行移動により、$a = \pm\pi$ と仮定して一般性を失わない。このとき、$f(a \pm 0) = f(\mp\pi)$ である。さて、

$$g(x) = f(x) - \frac{f(\pi) + f(-\pi)}{2}$$

とおくと、$g(-\pi) = -g(\pi)$ であり、

$$h(x) = g(x) - g(\pi)x = g(x) + g(-\pi)x$$

は、$x = \pm\pi$ で連続である。関数 $h$ は、$f$ に一次式を加えただけだから、$h$ の $x = \pm\pi$ 付近以外での値をなめらかな関数に置き換えたものは一様収束定理の仮定を満たし、とくに $x = \pm\pi$ でフーリエ展開される。したがって、局所性の原理により、$h$ のフーリエ級数で $x = \pm\pi$ を代入したものは、$h(\pm\pi) = 0$ に一致(収束)する。

一方、一次式 $Ax + B$ のフーリエ級数の $x = \pm\pi$ での値は、上の例題で見たように $B$ に一致(収束)するので、$f$ のフーリエ級数に $x = \pm\pi$ を代入したものは、

$$\frac{f(\pi) + f(-\pi)}{2}$$

に一致(収束)する。 □

次の二つの定理は、研究者レベルの難しさであるが、フーリエ級数の収束問題の微妙さを良く表していて、堪能に値する。

**定理 5.9 (Kolmogorov).** 区間 $[-\pi, \pi]$ 上の関数 $f(t)$ で、

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, dt < +\infty$$

であり、$f$ のフーリエ級数がほとんど全ての $t$ で発散するものが存在する。

**定理 5.10 (Carleson).** 二乗可積分関数（とくに連続関数） $f(x)$ に対して、

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} f_n e^{inx}$$

がほとんど全ての $x$ について成り立つ。

最後に、フーリエ係数の減少のスピードと関数の滑らかさについて。

**命題 5.11.** 周期関数 $f(x+2\pi) = f(x)$ のフーリエ係数を $\{f_n\}$ で表すとき、$f$ が $m-1$ 回微分可能であり、$f^{(m-1)}(x)$ がほとんど全ての $x$ で微分可能でさらに $f^{(m)}$ が二乗可積分であるための必要十分条件は、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{2m} |f_n|^2 < +\infty$$

となることで、このとき、$0 \le k < m$ について、

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (in)^k f_n e^{inx}$$

が $x$ について一様に成り立つ。

**系 5.12.** (i) $f$ が $m$ 回微分可能で $f^{(m)}$ が連続であれば、

$$f_n = o\left(\frac{1}{|n|^m}\right)$$

である。item $f$ のフーリエ係数 $f_n$ が

$$f_n = O\left(\frac{1}{|n|^{m+2}}\right)$$

をみたせば、$f$ は $m$ 階微分可能であり $f^{(m)}$ が連続である。