フーリエ解析入門

山上　滋

平成14 年10 月19 日

目 次

予備知識：１変数・２変数の微積分。内積の線型代数。複素関数の初歩。微分方程式の初歩。

1　振動現象とオイラーの公式

すべての振動現象 (oscillation phenomena) の背後には、三角関数が潜んでいる。また、三角関数には、複素指数関数としての実体を認めることができる。

オイラーの公式と振動現象の表現

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \qquad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

幾何学的解釈＝円周上の運動。

振動の微分方程式

$$f(t) = ce^{i\omega t}, \qquad \frac{d^2 f}{dt^2} + \omega^2 f = 0, \qquad \theta = \omega t.$$

以下では、関数といったら複素数を値に取るものを考える。**周期関数** (periodic function)、**周期** (period)

$$f(t+T) = f(t).$$

関数 $e^{i\omega t}$ は、周期 $T = 2\pi/\omega$ の周期関数。

周期 T と角振動数 ω の関係。**振動数** (周波数、frequency) $f = 1/T$ と角振動数の関係。

問 1. 関数 $e^{i\omega t}$ が、与えられた周期 $T > 0$ をもつための ω に対する条件は何か。

周期関数と $[0, T)$ 上の関数の対応。関数 x $(-\pi < x < \pi)$ は周期 2π の周期関数としては連続にはならない一方で、$|x|$ $(-\pi < x < \pi)$ は連続な周期関数を定める。

周期関数と 1 次元トーラス。角パラメータ $\theta = 2\pi t/T$。

周期関数の**周期積分** (periodical integration)

$$\int_0^T f(t)dt = \int_a^{a+T} f(t)dt = \oint_T f(t)dt.$$

ここで、（複素数値）関数の積分について復習。実数 t を変数に持つ関数 $f(t)$ を $f(t) = g(t) + ih(t)$ と二つの実数値関数を使って表すとき、

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt + i\int_a^b h(t)\,dt$$

であり、また

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n f(\tau_j)(t_j - t_{j-1})$$

である。前者の表式から、

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a), \quad F'(t) = f(t)$$

が得られ、後者の表式から、基本不等式

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt \qquad (a \leq b)$$

を得る。単振動の微分の公式 $(e^{i\omega t})' = i\omega e^{i\omega t}$ から、周期積分の例として、$n \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}dt = \begin{cases} 2\pi & \text{if } n = 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

を得る。

2　内積の幾何学

条件

$$\oint_T |f(t)|^2 dt < +\infty$$

をみたす（周期）関数を**二乗可積分**な (square integrable) 関数と呼ぶ。ここでは、関数の値として複素数もゆるしていることに注意。

二乗可積分な周期 T の周期関数全体を記号 $\mathcal{H}_T$ で表すことにする。すなわち、

$$\mathcal{H}_T = \left\{ f; f(t+T) = f(t),\ \oint_T |f(t)|^2 dt < +\infty \right\}.$$

集合（集団）$\mathcal{H}_T$ はしばしば $L^2(0,T)$ または $L^2(-T/2,T/2)$ と同一視される。

不等式

$$|f(t)+g(t)|^2 \le 2(|f(t)|^2 + |g(t)|^2)$$

を使うと、

$$f, g \in \mathcal{H}_T \Longrightarrow \alpha f + \beta g \in \mathcal{H}_T$$

がわかる（$\mathcal{H}_T$ はいわゆるベクトル空間になっている）。

さらに、不等式

$$2|f(t)g(t)| \le |f(t)|^2 + |g(t)|^2$$

を使えば、

$$(f|g) = \oint_T \overline{f(t)} g(t) dt = \int_0^T \overline{f(t)} g(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} \overline{f(t)} g(t) dt$$

によって有限の積分値（複素数）が得られる。

問 2. 複素数 z, w に対して、不等式

$$|z+w|^2 \le 2(|z|^2 + |w|^2), \quad 2|zw| \le |z|^2 + |w|^2$$

を確かめよ。

上の積分値に関して、以下のことが成り立つ。

(i) $(f|g_1 + g_2) = (f|g_1) + (f|g_2)$, $f|\beta g) = \beta(f|g)$.

(ii) $(f_1+f_2|g)=(f_1|g)+(f|g_2)$, $(\alpha f|g)=\overline{\alpha}(f|g)$.

(iii) $\overline{(f|g)}=(g|f)$.

(iv) $(f|f)\geq 0$.

問 3. これを確かめよ。

そこで、$(f|f)=0$ となる f を 0 と同一視すれば、$(f|g)$ は、いわゆる内積と同じ性質をみたすことがわかる（$\mathcal{H}_T$ は内積空間となる)。

関数と矢印の類似性がわかるかな。

内積であることがわかれば、いわゆるコーシー・シュワルツの不等式 (Cauchy-Schwarz' inequality) $|(f|g)|\leq\sqrt{(f|f)(g|g)}$ が成り立つ。すなわち、

$$\left|\oint_T \overline{f(t)}g(t)\,dt\right|\leq\sqrt{\oint_T |f(t)|^2dt}\sqrt{\oint_T |g(t)|^2dt}.$$

コーシーの不等式とシュワルツの不等式の違いがわかるかな。

二乗可積分な関数 f に対しては、シュヴァルツ (Hermann Schwarz) の不等式

$$\int_a^b |f(t)|\,dt\leq\sqrt{\int_a^b 1\,dt}\sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,dt}$$

より、定積分が存在することに注意する。

問 4. 有限閉区間 $[a,b]$ で定義された関数 f で、

$$\int_a^b |f(t)|\,dt<+\infty,\quad \int_a^b |f(t)|^2dt=+\infty$$

となる例を挙げよ。(微積分の教科書の広義積分の項を見て考える。)

内積からノルム。

直交性と**正規直交系**（OrthoNormal System）の概念。

例題 2.1. 関数の集まり $\{e^{int}/\sqrt{2\pi}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は $L^2(0,2\pi)$ の中で正規直交系をなす。

また、三角関数系 $\{\cos(nt)/\sqrt{\pi}\}_{n=1,2,\ldots}$ と $\{\sin(nt)/\sqrt{\pi}\}_{n=1,2,\ldots}$ および定数関数 $1/\sqrt{2\pi}$ を併せたものも $L^2(0,2\pi)$ の正規直交系である。

問 5. 上で与えた正規直交系を周期が T の場合に合うように書きなおせ。(何を求められているかわからない？いろいろ考えてみてください。)

問 6. 上で与えた二種類の正規直交系を結びつけるユニタリー変換はどのようなものか。（そもそもユニタリー変換がわからないかも。線型代数の本を調べてみるべし。手取り足取りは、もう卒業だ！）

命題 2.2 (最小二乗近似). 内積空間 $\mathcal{H}$ 内に正規直交系 $\{e_n\}_{n\geq 1}$ が与えられているとする。ベクトル f に対して、

$$f_\perp = f - \sum_n (e_n|f)e_n$$

とおくと、複素数列 $\{z_n\}$ に対して、

$$\|f - \sum_n z_n e_n\|^2 = \|f_\perp\|^2 + \sum_n |z_n - (e_n|f)|^2$$

が成り立つ。

　とくに、

$$\|f - \sum_n (e_n|f)e_n\| \leq \|f - \sum_n z_n e_n\|$$

であり（最良近似）

$$\sum_{n\geq 1} |(e_n|f)|^2 \leq (f|f)$$

が全ての $f \in \mathcal{H}$ に対して成り立つ。これを **Bessel の不等式**という。

系 2.3 (高周波平均の公式). 有界閉区間 $[a,b]$ で定義された二乗可積分関数 $f(t)$ に対して、

$$\lim_{n\to\pm\infty} \int_a^b f(t)e^{-int}\,dt = 0.$$

Proof. $[a,b] \subset [-\pi,\pi]$ の場合には、f を $t \in [-\pi,\pi] \setminus [a,b]$ では 0 であるように拡張して、

$$\int_a^b f(t)e^{-int}\,dt = \sqrt{2\pi}(e_n|f) \to 0 \quad (n \to \pm\infty)$$

に注意すれば良い。

　$[a,b] \not\subset [-\pi,\pi]$ の場合には、$[a,b]$ を $[-\pi+2\pi k, \pi+2\pi k]$ $(k \in \mathbb{Z})$ で分割して、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi+2\pi k}^{\pi+2\pi k} f(t)e^{-int}dt &= \int_{-\pi}^{\pi} f(s+2\pi k)e^{-in(s+2\pi k)}ds \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(s+2\pi k)e^{-ins}ds\end{aligned}$$

に上の場合を適用すれば良い。 □