フーリエ解析入門

山上　滋

平成17 年3 月31 日

　フーリエ解析は、常微分方程式・複素関数とともに応用解析学の「御三家」を成し、またその利用のされかたの違いから、大まかに言って数学・物理学・工学の三様の立場からのアプローチがあるようです。この授業のように、入門レベルにおいても、どの辺りに力点を置くかによって、随分印象の違ったものになります。基礎の部分の理論には、積分論を始めとした深い数学が関与しており、それはそれで、趣のある内容ではあるのですが、第一歩を踏み出す方向としては、躊躇せざるを得ません。この講義ノートでは、もともとのフーリエの立場がそうだったように、基本のアイデアが様々な形に展開されていく様子を提供してみたいと思っております。一方でまた、フーリエ解析学は応用数学の交差点でもあります。微積分・複素数・線型代数・微分方程式などなど、基礎数学の習得度を試すための良い題材にもなっています。これまで勉強してきた教科書を読み返すよい機会にもなるでしょう。
　参考書をいくつか挙げておきましょう。
「フーリエ解析とその応用」（洲之内源一郎）、サイエンス社。
１９７７年発行の古い本であるが、初等解析学の範囲内で論理性を確保しつつ偏微分方程式への応用の基礎が解説してあり、簡潔明快な良い本である。ただし、小冊子ということもあり、扱っている応用の範囲は広くはない。

「フーリエ解析入門」（吉川）、森北出版。
これも、数学的論理性および題材に配慮がなされた教科書である。応用として、不確定性原理（不等式）や高速フーリエ変換に触れている点が特徴的。

「フーリエ解析大全」（ケルナー）、朝倉書店。

これは、まさに「大全」というにふさわしいだけの内容と著者の見識が感じられる。ただし、それでも、まだ漏れる題材もあり、フーリエ解析の奥深さを表していると見るべきか。こういう、「文化」を感じさせてくれる本が、近年、とくに日本語の本で少ないように感じてしまうのだが、底の見える浅い池だけを奨励するという最近の風潮を反映しているのかも知れない。

予備知識：１変数・多変数の微積分。内積の線型代数。複素関数の初歩。微分方程式の初歩、と言ったところでしょうか。

目 次

1 振動現象とオイラーの公式

すべての振動現象 (oscillation phenomena) の背後には、三角関数が潜んでいる。また、三角関数には、複素指数関数としての実体を認めることができる。

オイラーの公式と振動現象の表現

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \qquad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

幾何学的解釈＝円周上の運動。

振動の微分方程式

$$f(t) = ce^{i\omega t}, \qquad \frac{d^2 f}{dt^2} + \omega^2 f = 0, \qquad \theta = \omega t.$$

以下では、関数といったら複素数を値に取るものを考える。**周期関数** (periodic function)、**周期** (period)

$$f(t+T) = f(t).$$

関数 $e^{i\omega t}$ は、周期 $T = 2\pi/\omega$ の周期関数。

周期 T と角振動数 ω の関係。**振動数** (周波数、frequency) $f = 1/T$ と角振動数の関係。

問 1. 関数 $e^{i\omega t}$ が、与えられた周期 $T > 0$ をもつための ω に対する条件は何か。

周期関数と $[0, T)$ 上の関数の対応。関数 x $(-\pi < x < \pi)$ は周期 2π の周期関数としては連続にはならない一方で、$|x|$ $(-\pi < x < \pi)$ は連続な周期関数を定める。

周期関数と１次元トーラス。角パラメータ $\theta = 2\pi t/T$。

周期関数の**周期積分** (periodical integration)

$$\int_0^T f(t)dt = \int_a^{a+T} f(t)dt = \oint_T f(t)dt.$$

ここで、（複素数値）関数の積分について復習。実数 t を変数に持つ関数 $f(t)$ を $f(t) = g(t) + ih(t)$ と二つの実数値関数を使って表すとき、

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt + i\int_a^b h(t)\,dt$$

であり、また

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^n f(\tau_j)(t_j - t_{j-1})$$

である。前者の表式から、

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a), \quad F'(t) = f(t)$$

が得られ、後者の表式から、基本不等式

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt \qquad (a \le b)$$

を得る。単振動の微分の公式 $(e^{i\omega t})' = i\omega e^{i\omega t}$ から、周期積分の例として、$n \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}dt = \begin{cases} 2\pi & \text{if } n = 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

を得る。

問 2. 関数 $e^{(a+ib)t}$ の積分を利用して、不定積分

$$\int e^{at}\cos(bt)\,dt, \qquad \int e^{at}\sin(bt)\,dt$$

を求めよ。

問 3. 複素数 c と自然数 n に対して、不定積分

$$\int t^n e^{ct}\,dt$$

を求める方法について考察し、$n = 1, 2$ の場合に、具体的に実行せよ。

2　内積の幾何学

条件
$$\oint_T |f(t)|^2 dt < +\infty$$
をみたす（周期）関数を**二乗可積分**な (square integrable) 関数と呼ぶ。ここでは、関数の値として複素数も許していることに注意。

二乗可積分な周期 T の周期関数全体を記号 $\mathcal{H}_T$ で表すことにする。すなわち、

$$\mathcal{H}_T = \left\{ f; f(t+T) = f(t),\ \oint_T |f(t)|^2 dt < +\infty \right\}.$$

集合（集団）$\mathcal{H}_T$ はしばしば $L^2(0,T)$ または $L^2(-T/2, T/2)$ と同一視される。

不等式
$$|f(t)+g(t)|^2 \le 2(|f(t)|^2 + |g(t)|^2)$$
を使うと、
$$f, g \in \mathcal{H}_T \Longrightarrow \alpha f + \beta g \in \mathcal{H}_T$$
がわかる（$\mathcal{H}_T$ はいわゆるベクトル空間になっている）。

さらに、不等式

$$2|f(t)g(t)| \le |f(t)|^2 + |g(t)|^2$$

を使えば、

$$(f|g) = \oint_T \overline{f(t)} g(t) dt = \int_0^T \overline{f(t)} g(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} \overline{f(t)} g(t) dt$$

によって有限の積分値（複素数）が得られる。

問 4. 複素数 z, w に対して、不等式

$$|z+w|^2 \le 2(|z|^2 + |w|^2), \quad 2|zw| \le |z|^2 + |w|^2$$

を確かめよ。

上の積分値に関して、以下のことが成り立つ。

(i) $(f|g_1 + g_2) = (f|g_1) + (f|g_2)$, $(f|\beta g) = \beta(f|g)$.

(ii) $(f_1+f_2|g)=(f_1|g)+(f|g_2)$, $(\alpha f|g)=\overline{\alpha}(f|g)$.

(iii) $\overline{(f|g)}=(g|f)$.

(iv) $(f|f)\geq 0$.

問 5. これを確かめよ。

そこで、$(f|f)=0$ となる f を 0 と同一視すれば、$(f|g)$ は、いわゆる内積と同じ性質をみたすことがわかる（$\mathcal{H}_T$ は内積空間となる）。
[関数と矢印の類似性がわかるかな。]

内積であることがわかれば、いわゆるコーシー・シュワルツの不等式 (Cauchy-Schwarz' inequality) $|(f|g)|\leq\sqrt{(f|f)(g|g)}$ が成り立つ。すなわち、

$$\left|\oint_T \overline{f(t)}g(t)\,dt\right|\leq\sqrt{\oint_T |f(t)|^2dt}\sqrt{\oint_T |g(t)|^2dt}.$$

[コーシーの不等式とシュワルツの不等式の違いがわかるかな。]

二乗可積分な関数 f に対しては、シュヴァルツ (Hermann Schwarz) の不等式

$$\int_a^b |f(t)|\,dt\leq\sqrt{\int_a^b 1\,dt}\sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,dt}$$

より、定積分が存在することに注意する。

問 6. 有限閉区間 $[a,b]$ で定義された関数 f で、

$$\int_a^b |f(t)|\,dt<+\infty,\quad \int_a^b |f(t)|^2dt=+\infty$$

となる例を挙げよ。(微積分の教科書の広義積分の項を見て考える。)

内積からノルム。$\|f\|=\sqrt{(f|f)}$, $\|f+g\|\leq\|f\|+\|g\|$, $\|\alpha f\|=|\alpha|\|f\|$.
直交性と**正規直交系**（OrthoNormal System）の概念。

問 7. 関数 e^{-at} $(0\leq t\leq 2\pi)$ の長さを求めよ。また、$a\to+\infty$ としたとき、グラフの様子と長さの変化の関連性について考察してみよ。

例題 2.1. 関数の集まり $\{e^{int}/\sqrt{2\pi}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は $L^2(0,2\pi)$ の中で正規直交系を成す。

また、三角関数系 $\{\cos(nt)/\sqrt{\pi}\}_{n=1,2,\ldots}$ と $\{\sin(nt)/\sqrt{\pi}\}_{n=1,2,\ldots}$ および定数関数 $1/\sqrt{2\pi}$ を併せたものも $L^2(0,2\pi)$ の正規直交系である。

問 8. 上で与えた正規直交系を周期が T の場合に合うように書き直せ。（何を求められているかわからない？いろいろ考えてみてください。）

問 9. 上で与えた二種類の正規直交系を結びつけるユニタリー変換はどのようなものか。（そもそもユニタリー変換がわからないかも。線型代数の本を調べてみるべし。手取り足取りは、もう卒業だ！）

命題 2.2 (最小二乗近似). 内積空間 $\mathcal{H}$ 内に正規直交系 $\{e_n\}_{n\geq 1}$ が与えられているとする。ベクトル f に対して、

$$f_\perp = f - \sum_n (e_n|f)e_n$$

とおくと、複素数列 $\{z_n\}$ に対して、

$$\|f - \sum_n z_n e_n\|^2 = \|f_\perp\|^2 + \sum_n |z_n - (e_n|f)|^2$$

が成り立つ。（ヒント：$(f_\perp|e_n) = 0$, $n = 1, 2, \dots$）

とくに、

$$\|f - \sum_n (e_n|f)e_n\| \leq \|f - \sum_n z_n e_n\|$$

であり（最良近似、best approximation）

$$\sum_{n\geq 1} |(e_n|f)|^2 \leq (f|f) = \|f\|^2$$

が全ての $f \in \mathcal{H}$ に対して成り立つ。これを **Bessel 不等式** (Bessel's inequality) という。

系 2.3 (高周波平均の公式). 有界閉区間 $[a,b]$ で定義された二乗可積分関数 $f(t)$ に対して、

$$\lim_{n\to\pm\infty} \int_a^b f(t)e^{-int}\,dt = 0.$$

Proof. $[a,b] \subset [-\pi,\pi]$ の場合には、f を $t \in [-\pi,\pi] \setminus [a,b]$ では 0 であるように拡張して、

$$\int_a^b f(t)e^{-int}\,dt = \sqrt{2\pi}(e_n|f) \to 0 \quad (n \to \pm\infty)$$

に注意すれば良い。

$[a,b] \not\subset [-\pi,\pi]$ の場合には、$[a,b]$ を $[-\pi+2\pi k, \pi+2\pi k]$ $(k\in\mathbb{Z})$ で分割して、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi+2\pi k}^{\pi+2\pi k} f(t)e^{-int}dt &= \int_{-\pi}^{\pi} f(s+2\pi k)e^{-in(s+2\pi k)}ds \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(s+2\pi k)e^{-ins}ds\end{aligned}$$

に上の場合を適用すれば良い。 □

問 10. $f(t)=1$, $f(t)=t$ に対して、上の性質を直接確かめよ。

Remark . 積分の基本不等式、

$$\left|\int_a^b f(t)e^{-int}dt\right| \leq \int_a^b \left|f(t)e^{-int}\right| dt$$

そのものは、この場合、役に立たない。

関数 $f(t)=t^{-1/2}$ $(0<t\leq 1)$ を考えると、

$$\int_0^1 |f(t)|^2\, dt = +\infty$$

であるが、$0<t\leq\delta$, $\delta\leq t\leq 1$ とわけて評価すれば。

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(t)e^{-int}\, dt = 0$$

である。このように、二乗可積分の仮定が満たされなくても、高周波平均の公式が成立する場合が多い。

上の結果は次のような直感的な意味付けが可能である。まず、オイラーの公式より、主張は

$$\lim_{n\to\infty}\oint f(t)\cos(nt)\, dt = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\oint f(t)\sin(nt)\, dt = 0$$

と同じ内容である。この積分に対する解釈としては、高周波関数 $\cos(nt)$ または $\sin(nt)$ で f を振幅変調 (amplitude modulation) して、それを f の周期にわたって積分するというもので、もし、関数 f の変化の仕方が $\cos(nt)$, $\sin(nt)$ の周期 $2\pi/n$ に比べてゆっくりであれば、プラス成分とマイナス成分の積分値が打ち消し合って、全体の積分値は 0 に近づく。

3　フーリエ級数

周期 2π の周期関数 $f(x)$ で

$$\oint |f(x)|^2 dx < +\infty$$

となるものを

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{inx}, \quad f_n \in \mathbb{C}$$

という形の級数 (**Fourier series**) で表示する問題（$f(x)$ の**フーリエ展開**）について考える。

形式的に計算すると、

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \oint_{2\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

となる。このように、複素数 f_n は関数 f で一意的に定まり、f の**フーリエ係数** (Fourier coefficient) と呼ばれる。さらにこのフーリエ級数は、正規直交系 $\{e_n(x) = e^{inx}/\sqrt{2\pi}\}$ を使って、

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (e_n | f) e_n(x)$$

と表すことができる。

ここで、フーリエの仕事の歴史的意義について一言。先行する、D. Bernoulli (1700–1782), L. Euler (1707–1783) の仕事との関係。J. Fourier (1768–1830) は、連続ではない周期関数を三角関数展開してみせ、「全ての (周期) 関数」がこのような表示をもつと主張し、その考えに基づいて、熱伝導方程式の解の研究を行ったようである。Fourier の「主張」は、その後、P. Dirichlet (1805–1859) 等によって厳密な証明が与えられた。

例題 3.1. ステップ関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \le x < \pi, \\ 0 & \text{if } -\pi \le x < 0. \end{cases}$$

のフーリエ係数は、

$$f_0 = \frac{1}{2}, \quad f_n = \frac{1-(-1)^n}{2\pi i n}$$

であるから、

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{inx}$$

は絶対収束しない。（絶対収束の意味がわかるかな。）

Remark . フーリエ級数が絶対収束すれば、得られる関数は、連続関数である。（逆は成り立たない。）

問 11. 三角関数 $\cos(mx), \sin(mx)$ のフーリエ係数を求めよ。

問 12. 自然数 m に対して、関数

$$x_+^m = \begin{cases} x^m & \text{if } x \geq 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

の区間 $[-\pi, \pi]$ でのフーリエ係数を求めよ。

問 13. 関数 f が実数を値に取るとき、フーリエ係数がみたすべき条件を求め、フーリエ展開を三角関数系により書き直せ。

4 近似定理

フーリエ展開の妥当性について調べよう。まず、絶対（値）収束するとは限らないので、その正則化 (regularization) を考える。これには、Fejer の方法を始めとしていくつかのアプローチがあるが、ここでは Poisson の方法について説明しよう。

高周波平均の公式（あるいはベッセル不等式）により、

$$\lim_{n\to\infty} f_n = 0$$

が成り立つので、$0 < r < 1$ に対して、

$$\sum_n f_n r^{|n|} e^{inx}$$

は絶対収束し、$r \to 1$ のとき、フーリエ級数に近づくと考えられる。この級数に、f_n を f の積分で表したものを代入すると、

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)P_r(x-y)\,dy$$

という表式を得る。ここで、$P_r(y)$ は、

$$\begin{aligned} P_r(y) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{iny} = \sum_{n=0}^{\infty}(re^{iy})^n + \sum_{n=1}^{\infty}(re^{-iy})^n \\ &= \frac{1}{1-re^{iy}} + \frac{re^{-iy}}{1-re^{-iy}} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos y + r^2} \end{aligned}$$

なる周期 2π の周期関数を表し、Poisson 核 (Poisson kernel) と呼ばれる。

命題 4.1 (Poisson 核の性質).

(i) $P_r(y) \geq 0$ (実は、$\frac{1+r}{1-r} \geq P_r(y) \geq \frac{1-r}{1+r}$) であり y の連続関数 (実は y の解析関数)。

(ii)
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(y)dy = 1,$$

(iii)
$$\lim_{r\to 1-0} P_r(y) = 0$$

for $y \neq 0$. More precisely, $\forall\delta > 0$, $\forall\epsilon > 0$, $\exists r' < 1$, $P_r(y) \leq \epsilon$ for $|y| \geq \delta$ and $r' \leq r < 1$.

問 14. $P_r(y)$ の概形を描き、上の諸性質を確かめよ。

二倍角の公式を使って、Poisson 核の表式を書きなおせば、

$$P_r(x) = \frac{1-r^2}{(1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{x}{2}}$$

が得られる。この形から、P_r の概形がわかる。

定理 4.2. 周期 2π の連続関数 $f(x)$ に対して、そのフーリエ係数を $\{f_n\}$ とすれば、

$$f(x) = \lim_{r\to 1-0}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n r^{|n|}e^{inx}$$

が成り立つ。より正確には、この収束は x に関して一様である。

Proof. 与えられた $\epsilon > 0$ に対して、

$$|f(x) - f(y)| \le \epsilon \qquad \text{for } |x-y| \le \delta$$

が成り立つように $\delta > 0$ を十分小さく取って（連続関数の一様連続性）、さらに

$$P_r(x-y) \le \epsilon \qquad \text{if } |x-y| \ge \delta$$

であるように $r < 1$ を十分 1 に近く取っておけば、

$$\left|2\pi f(x) - \int_{-\pi}^{\pi} f(y)P_r(x-y)\,dy\right| = \left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f(y))P_r(x-y)\,dy\right|$$
$$\le \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-f(y)|P_r(x-y)\,dy$$
$$= \int_{|x-y|\le\delta} |f(x)-f(y)|P_r(x-y)\,dy + \int_{|x-y|\ge\delta} |f(x)-f(y)|P_r(x-y)\,dy$$
$$\le \epsilon\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x-y)\,dy + \epsilon\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-f(y)|\,dy$$
$$\le 2\pi\epsilon + 4M\pi\epsilon$$

となる。$(M = \|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|; x \in \mathbb{R}\})$ □

問 15. 級数

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n r^{|n|} e^{inz}$$

は、$|\Im z| < -\log r$ で絶対収束し、したがって z の解析関数を定める。

系 4.3 (一様近似定理). $\forall\epsilon > 0$, $\exists N$, $\exists\{a_n\}_{n=-N}^{N}$

$$\left\|f - \sum_{-N}^{N} a_n e_n\right\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f(x) - \sum_{n=-N}^{N}\frac{a_n}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\right| \le \epsilon.$$

連続関数 f について、

$$\left\|f - \sum_{n=-N}^{N}(e_n|f)e_n\right\|^2 \le \left\|f - \sum_{n=-N}^{N}a_n e_n\right\|^2 \le 2\pi\|f - \sum a_n e_n\|_\infty^2 \to 0$$

次に、区分的に連続な関数 f に対しては、連続関数 g で $\|f-g\|$ がいくらでも小さいものが取れるので、

$$\left\|f - \sum_{n=-N}^{N}(e_n|f)e_n\right\| \le \|f - g - \sum(e_n|f-g)e_n\| + \|g - \sum(e_n|g)e_n\|$$
$$\le \|f-g\| + \|g - \sum(e_n|g)e_n\|$$

もいくらでも小さく取れる。

実は、

$$\oint |f(x)|^2 dx < +\infty$$

なる関数（二乗可積分関数）に対しても、連続関数による二乗平均近似が可能であることが知られているので、

定理 4.4. 周期 2π の二乗可積分な周期関数 $f(x)$, $g(x)$ に対して、

$$(f|g) = \sum (f|e_n)(e_n|g)$$

すなわち、

$$\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} g(x) dx = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{f_n} g_n, \qquad f_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)\, dx.$$

とくに、

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n|^2, \quad (f|f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |(e_n|f)|^2$$

である。

一般に、内積空間 $\mathcal{H}$ の正規直交系 $\{e_n\}$ が、すべてのベクトル f に対して

$$(f|f) = \sum_n |(e_n|f)|^2$$

を満たすとき、正規直交系は完全 (complete) であるという言い方をする。上の最後の関係は、**Parseval の等式** (Parseval's equality) と称され、三角関数系の完全性を表している。完全正規直交系に対しては、

$$f = \sum_n (e_n|f) e_n$$

が

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} (e_k|f) e_k \right\| = 0$$

の意味で成り立つので、完全正規直交系というかわりに正規直交基底という言い方もする。またこのとき、内積の連続性 (Cauchy-Schwarz の不等式) から

$$(f|g) = \sum_n (f|e_n)(e_n|g)$$

が一般的に従う。量子力学では、この関係式を

$$I = \sum_n |e_n)(e_n|$$

と簡潔に書き表す (Dirac の記法)。この記号のためには、内積は第二変数について線型であるように取っておく必要がある。

問 16. 次の等式を確認する。

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} (e_k|f) e_k\|^2 = (f|f) - \sum_{k=1}^{n} |(e_k|f)|^2.$$

問 17. 周期が $L > 0$ のときに、上の定理の公式を書きなおしてみよ。$f(x) = F(Lx/2\pi)$.

多項式で表される関数のフーリエ係数を計算するために、$y \in \mathbb{R}$ をパラメータとした不定積分

$$\int x^k e^{-iyx} dx$$

を求めてみよう。部分積分を使って「循環的」に計算することもできるが、ここでは、

$$\int e^{-iyx} dx = \frac{i}{y} e^{-iyx}$$

を y で次々に偏微分してみると、

$$\int x e^{-iyx} dx = \frac{ix}{y} e^{-iyx} + \frac{1}{y^2} e^{-iyx}$$

$$\int x^2 e^{-iyx} dx = i\frac{x^2}{y} e^{-iyx} + \frac{2x}{y^2} e^{-iyx} - \frac{2i}{y^3} e^{-iyx}$$

などとなる。

これを使って、x, x^2 $(-\pi < x < \pi)$ のフーリエ係数を計算すると、それぞれ

$$\frac{i}{n}(-1)^n (n \neq 0), \qquad \frac{2}{n^2}(-1)^n (n \neq 0)$$

となる。さらに Parseval の等式を書き下せば、ゼータ関数の特殊値が得られる。

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

問 18. x^2 の場合を確かめる。また x^3 の計算から何が出て来るか？

実数 x に対して、

$$\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \dots$$

を考察した L. Euler が無限積公式 (infinite product formula)

$$\zeta(x) = \prod_{p:\text{prime}} \left(1 - \frac{1}{p^x}\right)^{-1}$$

や、上で導いたような $\zeta(2n)$ の値の表示法を発見したことはよく知られている。
後に、この関係を複素変数に拡張してその性質を詳しく調べた B. Riemann に因んで、今日では、これをリーマンのゼータ関数と呼んでいる。複素関数としての $\zeta(z)$ は、(i) $z = 1$ にだけ一位の極をもつ有理形関数であり、(ii) $z = -2, -4, \dots$ で一位の零点をもち、(iii) それ以外の零点は $0 < \Re z < 1$ に集中している。
有名なリーマン予想は、(iii) の零点が直線 $\Re z = 1/2$ の上にのみ存在する、というもので、フェルマー予想が解決した今となっては、残された最大の難問（の一つ）となっている。

5　収束定理

導関数が（存在して）連続である関数を、「なめらか」(smooth) と呼び、さらに、なめらかな部分に分割できる（不連続点も許して）関数を区分的になめらか (piecewise smooth) ということにする。応用上現れる多くの関数は、区分的になめらかである。

補題 5.1. 連続な周期関数 f がほとんど全ての点で微分可能で、

$$\oint |f'(x)|^2 \, dx < +\infty$$

をみたすとき、f のフーリエ係数の和は絶対収束する。すなわち、

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n| < +\infty.$$

Proof. f' のフーリエ係数を f'_n で表せば、f' が二乗積分可能であることから、

$$\sum_n |f'_n|^2 < +\infty$$

である。一方、f の連続性に注意して部分積分を使えば、$f'_n = inf_n$ となるので、

$$\sum_n |f_n| = \sum_n \frac{1}{n}|f'_n| \leq \left(\sum_n \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \left(\sum_n |f'_n|^2\right)^{1/2} < +\infty$$

である。 □

問 19. 周期 2π の周期関数 $f(x)$ を $f(x) = x$ $(-\pi < x < \pi)$ で定めるとき、上の補題の結論が成り立たない。証明のどの部分が破綻しているのか確認。

問 20. 区分的になめらかな周期関数は、上の補題の仮定をみたす。

問 21. 関数 $f(x) = x\sin(1/x)$ $(-2/\pi \leq x \leq 2/\pi)$ は、(i) 連続な周期関数であり、(ii) 微分が二乗可積分にならない、ことを確認。

定理 5.2 (一様収束定理). 上の補題と同じ仮定の下に、

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{inx}$$

が x について一様に成り立つ。

Proof. ポアソン核を使った一様近似定理

$$f(x) = \lim_{r\to 1-0} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n r^{|n|} e^{inx}$$

および上の補題から、

$$\left| f(x) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{inx} \right| \leq \left| f(x) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n r^{|n|} e^{inx} \right| + \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n|(1 - r^{|n|})$$

と評価すれば、よい。 □

例題 5.3. $f(x) = |x|$ $(-\pi \le x \le \pi)$. 不定積分

$$\int xe^{-inx}\,dx = \frac{i}{n}xe^{-inx} + \frac{1}{n^2}e^{-inx}$$

を使って、

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|e^{-inx}dx = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \quad (n \neq 0)$$

と $f_0 = \pi/2$ より、

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n:\mathrm{odd}} \frac{1}{n^2}e^{inx} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos(3x) + \frac{1}{5^2}\cos(5x) + \dots\right).$$

例題 5.4. 連続な周期関数 $f(x) = |x|^\alpha$ $(-\pi \le x \le \pi)$ 、ただし $\alpha > 0$、に対して、

$$\oint |f'(x)|^2 dx = \begin{cases} \frac{2\alpha^2\pi^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} & \text{if } 2\alpha - 1 > 0, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Dirichlet 核と局所性の原理

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^{n} f_k e^{ikx} &= \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\oint f(y)e^{ik(x-y)}dy \\ &= \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\oint f(x-y)e^{iky}dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\oint f(x-y)D_n(y)dy. \end{aligned}$$

ここで、Dirichlet 核 $D_n(y)$ は、

$$D_n(y) = \sum_{k=-n}^{n} e^{iky} = e^{-iny}\sum_{k=0}^{2n} e^{iky} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})y}{\sin\frac{y}{2}}$$

で与えられる周期 2π の解析関数である。

問 22. 十分大きい n に対して、Dirichlet 核のグラフを想像してみよ。

命題 5.5 (Dirichlet 核の性質).

(i) 任意の連続関数（二乗可積分関数でも良い）$f(x)$ と任意の $\delta > 0$ に対して、

$$\lim_{n\to\infty}\int_{|x|\ge\delta} f(x)D_n(x)\,dx = 0.$$

(ii) すべての $n \geq 1$ に対して、

$$\oint D_n(x)\,dx = 2\pi.$$

Proof. (i) Dirichlet 核の $\sin(n+1/2)x$ の部分を、

$$e^{(n+1/2)x} - e^{-i(n+1/2)x} = 2i\sin(n+1/2)x$$

と書き直して高周波平均の公式を使えばよい。($|x| \geq \delta$ に限定しているので、D_n の分母 $\sin(x/2)$ は 0 に近づかない。)

(ii) $\{e^{ikx}\}$ の直交性により、

$$\oint D_n(x)\,dx = \sum_{k=-n}^{n} \oint e^{-ikx}\,dx = 2\pi.$$

□

補題 5.6 (局所性の原理 (principle of localization)). 二乗可積分な周期関数 $f(x)$ に対して、$x = a$ の付近で

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} f_k e^{ikx}$$

であるかどうかは、f の $x = a$ の付近での振る舞いだけで決まる。

より正確には、二乗可積分関数 $f(x), g(x)$ が $f(x) = g(x)$ $(|x-a| \leq 2\delta)$ を満たせば、

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} (f_k - g_k)e^{ika} = 0$$

が $|x-a| \leq \delta$ について一様に成り立つ。

Proof. 実際、$h(x) = f(x) - g(x)$ とおくと $h(x) = 0$ $(|x-a| \leq 2\delta)$ であり、問題にしている性質は、

$$\lim_{n\to\infty} \int (h(x-y) - h(x))D_n(y)dy = 0 \quad \text{uniformly for } |x-a| \leq \delta$$

と同値になる。この左辺の積分を

$$\int_{|y|\geq\delta} (h(x-y) - h(x))D_n(y)dy + \int_{|y|\leq\delta} (h(x-y) - h(x))D_n(y)dy$$

と分けると、仮定から後者の被積分関数は 0 であり、一方前者の積分値は、Dirichlet 核の「局在性」により、$n \to \infty$ のとき $|x-a| \leq \delta$ に関して一様に 0 に近づく。 □

例題 5.7. 関数 $f(x) = x$ $(-\pi < x < \pi)$ の場合の計算。

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}dx = \frac{i(-1)^n}{n}, \qquad n \neq 0$$

と局所性の原理により、

$$x = \sum_{n\neq 0}\frac{i(-1)^n}{n}e^{inx} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin(nx),$$

が $-\pi < x < \pi$ で成り立つ。とくに、$x = \pi/2$ とおくと、

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

がわかる。また $x = \pm\pi$ において、

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n} f_k e^{ikx} = 0$$

である。

定理 5.8 (Dirichlet). 有界な周期関数 f のマイルドな不連続点 $x = a$ において、($x = a$ 付近の $x = a$ 以外の点で微分可能で導関数が二乗可積分)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n} f_k e^{ika} = \frac{f(a+0)+f(a-0)}{2}$$

が成り立つ。

とくに、マイルドな連続点においては、フーリエ級数は収束しその値は $f(a)$ に等しい。

Proof. まず、$x = a$ で左右の極限が存在することが、f' が $x = a$ の付近で可積分であることからわかる。

平行移動により、$a = \pm\pi$ と仮定して一般性を失わない。このとき、$f(a\pm 0) = f(\mp\pi)$ である。さて、

$$g(x) = f(x) - \frac{f(\pi)+f(-\pi)}{2}$$

とおくと、$g(-\pi) = -g(\pi)$ であり、

$$h(x) = g(x) - g(\pi)x = g(x) + g(-\pi)x$$

は、$x=\pm\pi$ で連続である。関数 h は、f に一次式を加えただけだから、h の $x=\pm\pi$ 付近以外での値をなめらかな関数に置き換えたものは一様収束定理の仮定を満たし、とくに $x=\pm\pi$ でフーリエ展開される。したがって、局所性の原理により、h のフーリエ級数で $x=\pm\pi$ を代入したものは、$h(\pm\pi)=0$ に一致（収束）する。

一方、一次式 $Ax+B$ のフーリエ級数の $x=\pm\pi$ での値は、上の例題で見たように B に一致（収束）するので、f のフーリエ級数に $x=\pm\pi$ を代入したものは、

$$\frac{f(\pi)+f(-\pi)}{2}$$

に一致（収束）する。 □

Remark . マイルドな連続点では、収束はある意味で一様であるが、不連続点では、そうならない（Gibbs 現象）。

次の二つの定理は、研究者レベルの難しさであるが、フーリエ級数の収束問題の微妙さ加減を表していて、堪能に値する。

定理 5.9 (Kolmogorov). 区間 $[-\pi,\pi]$ 上の関数 $f(t)$ で、

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\,dt<+\infty$$

であり、f のフーリエ級数がほとんど全ての t で発散するものが存在する。

定理 5.10 (Carleson). 二乗可積分関数（とくに連続関数） $f(x)$ に対して、

$$f(x)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}f_ne^{inx}$$

がほとんど全ての x について成り立つ。

最後に、フーリエ係数の減少のスピードと関数の滑らかさの関係について。

命題 5.11. 周期関数 $f(x+2\pi)=f(x)$ のフーリエ係数を $\{f_n\}$ で表すとき、f が $m-1$ 回微分可能であり、$f^{(m-1)}(x)$ がほとんど全ての x で微分可能でさらに $f^{(m)}$ が二乗可積分であるための必要十分条件は、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}n^{2m}|f_n|^2<+\infty$$

となることで、このとき、$0 \le k < m$ について、

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (in)^k f_n e^{inx}$$

が x について一様に成り立つ。

系 5.12. (i) f が m 回微分可能で $f^{(m)}$ が連続であれば、

$$f_n = o\left(\frac{1}{|n|^m}\right)$$

である。

(ii) f のフーリエ係数 f_n が

$$f_n = O\left(\frac{1}{|n|^{m+2}}\right)$$

をみたせば、f は m 階微分可能であり $f^{(m)}$ が連続である。

問 23. 上の系の意味を、数式を使わずに言葉だけで説明してみよ。

6 フーリエ級数からフーリエ変換へ

周期的でない関数は、周期が無限大であると思えば、そのフーリエ係数は、振動数 ξ の関数として、

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

なるものを考えることに相当する。これを関数 f のフーリエ変換と称する。「無限大の周期」に相当して、振動数はすべての実数値を取り得るようになる。

これを解釈するために、いま十分大きな周期 $2L$ を考え、関数 $f(x)$ は、$[-L, L]$ 以外では 0 の値を取るものとする。（f の**台** (support) が $[-L, L]$ に含まれる、といった言い方をする。）さて周期 2π の関数 F を

$$F(x) = f\left(\frac{L}{\pi}x\right), \qquad -\pi \le x \le \pi$$

であるように定めて、そのフーリエ係数を求めると、

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)e^{-inx}\,dx \\ &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(y)e^{-i\pi ny/L}\,dy \\ &= \frac{1}{2L}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\pi nx/L}\,dx \end{aligned}$$

となる。

そこで、$L \to \infty$ での情報を得るために、F_n の代わりに $2LF_n$ を考え、係数を表すパラメータを n から $\xi = \pi n/L$ に変更すれば、上で与えた f のフーリエ変換にたどり着く。

補題 6.1. f の台が有界で、

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f^{(m)}(x)|dx < +\infty$$

ならば、$\widehat{f}$ は解析関数で

$$\widehat{f}(\xi) = O(1/|\xi|^m).$$

Proof. 台が区間 $[a, b]$ に含まれるとすると、

$$\widehat{f}(\xi) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-i)^n}{n!}\xi^n \int_a^b x^n f(x)\,dx$$

であり、この ξ の冪級数の収束半径は ∞ である。

また、部分積分を繰り返して使うと、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(m)}(x)e^{-ix\xi}dx = (i\xi)^m \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx$$

となるので、

$$|\xi|^m|\widehat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(m)}(x)|dx$$

である。 □

問 24. 上の証明の中で、収束半径の部分を詳しく計算（評価）する。

フーリエ変換からもとの関数が復元される様子を調べるために、台が有界で、２階の微分が連続である関数 f について考える。十分大きな周期 $2L > 0$ に対して、$f(x) = 0$ for $|x| \geq L$ であるから、$f|_{[-L,L]}$ を周期 $2L > 0$ の周期関数に直したものに、フーリエ展開公式を適用すると、

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} e^{i\pi n(x-y)/L} f(y)\,dy = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\pi}{L} e^{i\pi nx/L} \widehat{f}(\pi n/L)$$

となるので、$\widehat{f}$ は連続かつ $\widehat{f}(\xi) = O(1/|\xi|^2)$ に注意すれば、$L \to \infty$ のとき、上の和は、リーマン積分

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\,\widehat{f}(\xi)\,d\xi$$

に近づく。

さらに Parseval の等式は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\pi}{L} |\widehat{f}(\pi n/L)|^2$$

となって、これは $L \to \infty$ のとき、積分

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

に近づく。関数 $\widehat{f}(\xi)$ が二乗可積分であることに注意。

問 25. 補題に注意して、上の収束結果を確かめよ。

さて、一般の関数 $f(x)$ に対しては、フーリエ変換 $\widehat{f}(\xi)$ の定義に現れる広義積分の存在自体が問題となる。例えば $f(x)$ が可積分 (integrable)、すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < +\infty$$

であれば、少なくとも

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi}\,dx$$

が意味をもつ。

命題 6.2. 関数 $f(x)$ が絶対積分可能であるとき、そのフーリエ変換 $\widehat{f}(\xi)$ は、ξ の連続関数で

$$\lim_{\xi \to \pm\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$$

をみたす。

Proof. 実数 $a < b$ に対して $\int_a^b f(x)e^{-ix\xi}\,dx$ は ξ の連続関数であり $\xi \to \pm\infty$ のとき 0 に近づくことは高周波平均の公式そのものである。

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)e^{-ix\xi}\,dx, \qquad \int_{b}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx$$

の部分は、$f(x)$ が可積分であることからいくらでも小さくできるので、命題の主張が確かめられる（「しっぽ切」の方法）。 □

Remark . 上の命題における連続性の証明で、ルベーグの収束定理を適用する向きもあるが、それは「牛刀使い」というものであろう。

問 26. $\int_a^b |f(x)|^2\,dx < +\infty$ ならば、$\int_a^b |f(x)|\,dx < +\infty$ であることを示せ。逆は成り立つか。

問 27. 「しっぽ切」の方法は、ϵ-δ 論法の典型的な例を与える。（むしろ、このような種類の推論を厳密化する過程で、ϵ-δ 論法が確立したというべきか。）例えば、連続性の証明は次のようにして行う。$\forall\epsilon > 0$, $\exists a > 0$,

$$\int_{|x|\geq a} |f(x)|\,dx \leq \epsilon.$$

このとき、ξ と η とを十分近くに取って、$|e^{-ix\xi} - e^{-ix\eta}| \leq \epsilon$ $(|x| \leq a)$ であるようにしておけば、

$$|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\eta)| \leq \int_{-a}^{a} |f(x)(e^{-ix\xi} - e^{-ix\eta}|\,dx + 2\epsilon \leq \epsilon\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx + 2\right)$$

は好きなだけ小さくできる。

以上の説明を参考にして、無限遠点で 0 に近づくことを証明せよ。

既に確かめた Parseval の等式（フーリエ変換版）の証明を繰り返すことで、次を得る。

補題 6.3. 関数 $f(x)$ は有界区間 $[a,b]$ の外で 0 で、

$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx < +\infty$$

を満たすとする。このとき（f は可積分であることに注意)、等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi$$

が成り立つ。

定理 6.4. 関数 $f(x)$ が、

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < +\infty, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty$$

であるとき、そのフーリエ変換 $\widehat{f}$ は連続かつ

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi < +\infty$$

であり、$f \mapsto \widehat{f}/\sqrt{2\pi}$ は、$L^2(\mathbb{R})$ から $L^2(\mathbb{R})$ へのユニタリー変換を定める。とくに、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}g(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}(\xi)}\widehat{g}(\xi)d\xi$$

である。

さらに、逆変換の公式

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

が弱い意味で成り立つ。（Lebesgue 積分論を援用すれば、より強く、ほとんど全ての x で成り立つことがわかる。）

Proof. 「しっぽ切り」の方法による。関数 $f(x)$ に対して、

$$f_a(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } |x| \le a, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおき、そのフーリエ変換を $\widehat{f_a}$ で表す。すなわち、

$$\widehat{f_a}(\xi) = \int_{-a}^{a} f(x)e^{-ix\xi}\,dx$$

である。まず、$\widehat{f}(\xi)$ が $\widehat{f}_a(\xi)$ によって近似されることを確かめよう。実際、

$$|\widehat{f}(\xi)-\widehat{f}_a(\xi)| = \left|\int_{|x|\geq a} f(x)e^{-ix\xi}\,dx\right| \leq \int_{|x|\geq a} |f(x)|\,dx \to 0 \quad (a\to+\infty)$$

（ξ に関して一様収束）である。

さて、上の補題から、

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}_a(\xi)|^2\,d\xi = 2\pi\int_{-a}^{a}|f(x)|^2\,dx$$

が成り立つ。

さらに、$a\leq b$ に対して、

$$\widehat{f}_b(\xi)-\widehat{f}_a(\xi) = \int_{a\leq|x|\leq b} f(x)e^{-ix\xi}\,dx$$

であるので、関数

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } a\leq|x|\leq b, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

に上の補題を適用して、

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{f}_b(\xi)-\widehat{f}_a(\xi)|^2\,d\xi = \int_{a\leq|x|\leq b}|f(x)|^2\,dx \leq \int_{|x|\geq a}|f(x)|^2\,dx$$

を得る。

そこで、$b\to+\infty$ とし、その後 $a\to+\infty$ とするのであるが、まず、$b\to+\infty$ の部分を処理するために、一旦左辺を

$$\int_{-c}^{c}|\widehat{f}_b(\xi)-\widehat{f}_a(\xi)|^2\,d\xi \leq 2\pi\int_{|x|\geq a}|f(x)|^2\,dx$$

と書き直して、$b\to+\infty$ とすると（$\widehat{f}_b(\xi)\to\widehat{f}(\xi)$ が一様収束であることに注意して)、

$$\int_{-c}^{c}|\widehat{f}(\xi)-\widehat{f}_a(\xi)|^2\,d\xi \leq 2\pi\int_{|x|\geq a}|f(x)|^2\,dx$$

を得るのでさらに、$c\to+\infty$ とすれば、

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(\xi)-\widehat{f}_a(\xi)|^2\,d\xi \leq 2\pi\int_{|x|\geq a}|f(x)|^2\,dx$$

となる。最後に $a \to +\infty$ とすれば、Parseval の等式を導くことができる。

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi &= \lim_{a\to+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}_a(\xi)|^2\, d\xi \\
&= \lim_{a\to+\infty} 2\pi \int_{-a}^{a} |f(x)|^2\, dx \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx.
\end{aligned}$$

この Parseval の等式を書き直すことで、他の主張も得られる。 □

問 28. 関数 f が実数値関数であるための必要十分条件は、

$$\overline{\widehat{f}(\xi)} = \widehat{f}(-\xi).$$

とくに、実数値関数 f に対して、$\widehat{f}$ は、$\widehat{f}(\xi)$ $(\xi \geq 0)$ で決まる。これをさらに情報を落として、$|\widehat{f}(\xi)|^2$ を $\xi > 0$ の関数として表示したものを工学方面では power spectrum という（のかな？）。

問 29. 関数 $h(\xi)$ に対して、

$$\|h\| = \sqrt{\int_{-c}^{c} |h(\xi)|^2\, d\xi}$$

とおくとき、不等式 $\|\widehat{f} - \widehat{f}_a\| \leq \|\widehat{f} - \widehat{f}_b\| + \|\widehat{f}_b - \widehat{f}_a\|$ を利用して、

$$\|\widehat{f} - \widehat{f}_a\|^2 \leq 2\pi \int_{|x|\geq a} |f(x)|^2\, dx$$

を示せ。

また、三角不等式

$$\|\widehat{f}_a\| - \|\widehat{f} - \widehat{f}_a\| \leq \|\widehat{f}\| \leq \|\widehat{f}_a\| + \|\widehat{f} - \widehat{f}_a\|$$

と上の評価式を利用して

$$\lim_{a\to+\infty} \|\widehat{f}_a\| = \|\widehat{f}\|$$

を導け。

上の定理で述べた逆変換の公式の弱い意味でというのは、Parseval の等式を言い換えただけなので、個々の点で成立するかどうかについては明確ではない。そもそも、$f \in L^1(\mathbb{R})$ というだけでは、$\widehat{f}$ の可積分性は出てこないので、逆変換の公式における積分の意味をまず明確にしておく必要がある。

これは次のように考えると良い。まず、$\widehat{f}(\xi)$ が ξ の連続関数であることに注意して

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi = \lim_{N\to+\infty} \int_{-N}^{N} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi$$

を考える。左辺の広義積分を処理する際に、原点を中心に左右対称の範囲で積分を考えるところがポイントである。右辺の極限の存在がまず問題になる。

$$\int_{-N}^{N} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \int_{-N}^{N} e^{i(x-y)\xi}\, d\xi\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\Delta_N(x-y)\, dy$$

ここで、

$$\Delta_N(x) = \int_{-N}^{N} e^{ix\xi}\, d\xi = 2\frac{\sin(Nx)}{x}.$$

と置いた。フーリエ級数で現れたものと多少形が異なるが、これも Dirichlet 核と呼ばれる。

問 30. 大きな N に対する $\Delta_N(x)$ の概形を描いて見よ。フーリエ級数の際の $D_n(x)$ と似ている点、異なっている点は何か。

補題 6.5 (局所性の原理). 関数 $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ に対して、$x = a$ の付近で

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{N}^{N} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi$$

であるかどうかは、$f(x)$ の $x = a$ の付近での振る舞いだけで決まる。

より正確には、関数 $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ が、$f(x) = g(x)$ ($|x-a| \le 2\delta$) を満たせば、

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} (\widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi)) e^{ix\xi}\, d\xi = 0$$

が $|x-a| \le \delta$ について一様に成り立つ。

問 31. フーリエ級数の場合の局所性原理の証明を参考にして、上のフーリエ変換に対するそれを与えよ。

定理 6.6 (Dirichlet). 関数 $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ のマイルドな不連続点 $x = a$ において、逆変換の公式が

$$\frac{f(a+0)+f(a-0)}{2} = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \widehat{f}(\xi) e^{ia\xi}\, d\xi$$

という形で成り立つ。

7 ガウス積分と有理関数のフーリエ変換

ここでは、フーリエ変換が具体的に計算できる重要な関数について調べる。

例題 7.1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-ix\xi} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\xi^2/4a}.$$

この積分公式は、$\xi = 0$ の場合に、ガウス積分 (Gaussian integral) として有名である。この ξ が入った場合もそのように呼ぶことが多い。

左辺を $F(\xi)$ とおいて、微分方程式

$$\frac{dF}{d\xi} = -\frac{\xi}{2a} F$$

を導く。あるいは、複素積分に書き直して Cauchy の積分定理を使ってもよい。いずれの場合も最後は $\xi = 0$ の場合に帰着させる。

問 32. （広義）重積分の応用として、ガウス積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

を導け。さらに、左辺の積分において、$y = x + \xi$ という変数変換を行うことで得られる公式と上記例題の公式とを比較せよ。

問 33. 正定数 $a >$ に対して、$f(x) = (x$ の多項式$)e^{-ax^2}$ は何度微分しても同じ形で

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < +\infty$$

である。

問 34. 次のガウス積分の一般形を確かめよ。正数 $a>0$ と複素数 b に対して、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{b^2/(4a)}$$

である。また、関連する次の公式を導け。

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-ax^2-i\xi} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left(i\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^n e^{-\xi^2/(4a)}.$$

ここで、話題を変えて、衝撃信号を表す

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\lambda x} & \text{if } x>0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

なる関数 ($\lambda > 0$ は衝撃の鋭さを表すパラメータ) のフーリエ変換を求めて見ると、

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x - ix\xi} dx = \frac{1}{\lambda + i\xi}$$

となる。したがって、逆変換は、

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix\xi}}{\lambda + i\xi}\, d\xi = \begin{cases} e^{-\lambda x} & \text{if } x>0, \\ 0 & \text{if } x<0 \end{cases}$$

である。このように、解析的な関数 $e^{ix\xi}/(\lambda+i\xi)$ の積分として、不連続な関数が出現することは、フーリエの当時の常識からすると、「驚異」であった。今日的見方からすると、こういったある種の「相転移現象」は数学の至るところに出現するきわめて日常的なものである。

問 35. 正数 λ に対して、

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\xi}}{i\xi - \lambda}\, d\xi = \begin{cases} 0 & \text{if } x>0, \\ -e^{\lambda x} & \text{if } x<0 \end{cases}$$

を示せ。

問 36. 複素変数における Cauchy の積分定理を援用して、上の逆変換の公式を直接確かめよ。上下半円の選択がパラメータ x の符号で変化する様を実感せよ。

また、複素変数の対数関数の性質を利用して、$x=0$ の場合の積分値が、1/2 であることを示せ。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z-i\lambda}\, dz = \log(z-i\lambda)\Big|_{z=-\infty}^{z=+\infty} = \pi i.$$

課題：上の問題からもわかるように、フーリエ変換の計算においても複素積分の方法は、しばしば役に立つ。ここでは、衝撃信号の一般化として、次の関数について考えてみよう。

$$f(x) = \begin{cases} x^\lambda e^{-ax} & \text{if } x > 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ここで、$a >$ であり、λ は複素数とし、

$$x^\lambda = e^{\lambda \log x}, \qquad x > 0.$$

$$\widehat{f}(\xi) = \int_0^{+\infty} x^\lambda e^{-ax-ix\xi}\, dx$$

において、積分変数を x から $z = (a+i\xi)x$ に変えると、

$$\widehat{f}(\xi) = (a+i\xi)^{-\lambda-1} \int_L z^\lambda e^{-z}\, dz$$

となる。ここで、L は原点から $a+i\xi$ 方向に延びる半直線を表す。このとき、この半直線と正実直線と十分大きな円で囲まれた扇形閉曲線に積分定理を適用すれば、右半平面で、関数 e^{-z} が急減少していることに注意して、この複素積分を正実積分で置き換えると、

$$\widehat{f}(\xi) = (a+i\xi)^{-\lambda-1} \int_0^{+\infty} x^\lambda e^{-x}\, dx = (a+i\xi)^{-\lambda-1}\Gamma(\lambda+1)$$

と計算される。したがって、逆変換により、

$$\int_{-\infty}^{\infty} (a+i\xi)^{-\lambda-1} e^{ix\xi}\, d\xi = \begin{cases} 2\pi x^\lambda e^{-ax}/\Gamma(\lambda+1) & \text{if } x > 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

であることがわかる。

以上の細部を研究してみよ。

8　フーリエ変換の諸公式と双対性

移動と掛け算作用素、合成積。実数値関数のフーリエ変換。双対性。関数の滑らかさ vs. 無限遠での振る舞い。

関数 $f(x)$ にその平行移動 $f(x-a)$ を対応させる操作を記号 T_a で表し、**移動作用素**(translation) と呼ぶ。

移動作用素は、連続かつユニタリーである。

$$\lim_{y\to a}\|T_y f - T_a f\| = 0.$$

関数 $f(x)$, $g(x)$ の**合成積**(convolution) は、

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$$

で定義される。合成積は、交換法則と結合法則をみたす。

$$f*g = g*f, \qquad (f*g)*h = f*(g*h).$$

関数 $f(x)$ のスケール変換を $f(rx)$ $(0 \neq r \in \mathbb{R})$ で定める。

$f(x)$	$\widehat{f}(\xi)$
$rf(rx)$	$\widehat{f}(\xi/r)$
$f(x+a)$	$e^{ia\xi}\widehat{f}(\xi)$
$f^{(n)}(x)$	$(i\xi)^n\widehat{f}(\xi)$
$e^{-i\alpha x}f(x)$	$\widehat{f}(\xi+\alpha)$
$2\pi f(x)g(x)$	$\widehat{f}*\widehat{g}$
$f*g$	$\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$

平行移動の公式で、parameter a についての微分を計算すると、微分の公式が得られる。逆に、微分を使って、形式的な Taylor 展開を実行すれば、平行移動の関係式が復元する。

フーリエ変換によって上記のような代数関係の双対性が成り立つ。

問 37. 合成積の公式と共に、上の対応表の関係をすべて確かめよ。

次に関数の解析的な性質についての双対性を調べよう。次の結果はすでに説明が済んだことであるが、重要なので再録しておこう。

補題 8.1 (Riemann-Lebesgue). 関数 $f(x)$ が $\int |f(x)|dx < +\infty$ を満たせば、そのフーリエ変換 $\widehat{f}(\xi)$ は、ξ の連続関数で、

$$\lim_{\xi\to\pm\infty}\widehat{f}(\xi) = 0.$$

Proof. 関数 f に対して、2回連続微分可能で台が有界である関数 g で、

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)| dx$$

が小さいものを用意して、

$$|\widehat{f}(\xi)| \le |\widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi)| + |\widehat{g}(\xi)|$$

と評価すれば、補題 6.1 (あるいは高周波平均の公式）で示したように、$\widehat{g}(\xi) \to 0$ $(\xi \to \infty)$ であるので、まず、f を g で近似して第一項を好きなだけ小さくし、次に $|\xi|$ を大きくして、第二項も小さくできる。 □

命題 8.2.

(i) 関数 $f(x)$ が、m 回微分可能で、

$$\lim_{x\to\pm\infty} f^{(l)}(x) = 0 (0 \le l \le m-1), \quad \int |f^{(m)}(x)| dx < +\infty$$

であれば、$\widehat{f}(\xi)$ は連続であり、

$$\widehat{f}(\xi) = o\left(\frac{1}{|\xi|^m}\right)$$

となる。すなわち、

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} \xi^m \widehat{f}(\xi) = 0$$

である。

(ii) また、$\widehat{f}(\xi)$ が連続でかつ $\widehat{f}(\xi) = O(1/|\xi|^{m+2})$ を満たせば、f は m 回微分可能で、$f^{(m)}$ は連続かつ

$$\lim_{x\to\pm\infty} f^{(l)}(x) = 0 (0 \le l \le m),$$

である。

Proof. (i) 各 $f^{(l)}$ が無限遠点で消えることに注意して、部分積分を繰り返すと、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(m)}(x) e^{-ix\xi} dx = (i\xi)^m \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

が得られるので、右辺が $(i\xi)^m \widehat{f}(\xi)$ に一致し、左辺は上の補題から無限遠で消える。

(ii) $\widehat{f}$ が連続で $\widehat{f}(\xi) = O(1/|\xi|^2)$ であるから、可積分であり、したがって、Riemann-Lebesgue により、

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)d\xi$$

は連続かつ無限遠で消える。さらに、$\widehat{f}(\xi) = O(1/|\xi|^3)$ に注意すれば、f は微分可能で、

$$f'(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (i\xi)\widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

がなりたち、$i\xi\widehat{f}(\xi)$ に Riemann-Lebesgue を使えば、$f'(x)$ が連続かつ無限遠で消えることがわかる。

以下、これを繰り返せばよい。 □

関数 $f \in L^2(\mathbb{R})$ が微分ができるという条件を、

$$\lim_{h\to 0}(T_h f - f)/h = g$$

で置き換えてみよう。すなわち、$g \in L^2(\mathbb{R})$ で、

$$\lim_{h\to 0}\|(T_h f - f)/h - g\| = 0$$

であるとき、f は L^2-微分可能であるといい、$g = f'$ と書くことにする。

このとき、f が C^1 かつ $f' \in L^2(\mathbb{R})$ であれば、f は L^2-微分可能で、L^2-微分は f の導関数 f' で与えられる。

命題 8.3. 関数 $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して、

(i) $f^{(n)} \in L^2$ であれば $\xi^n\widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$ であり、

(ii) 逆に $\xi^n\widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$ であれば、f は C^{n-1} である。

Proof. まず、$\xi^n\widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$ ならば、$\xi^m\widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$ に注意する。これは、$|\xi| \le 1$, $|\xi| \ge 1$ とわけて、$|\xi| \le 1$ で Cauchy-Schwartz を使えばよい。 □

問 38. 自然数 n と正数 $\lambda > 0$ について、関数

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\lambda + i\xi)^n}e^{ix\xi}\,d\xi$$

を考える。部分積分を利用して

$$f_{n+1}(x) = \frac{x}{n}f_n(x)$$

を導き、$(\lambda + i\xi)^n$ の無限遠点での減少度とそのフーリエ（逆）変換である f_n の関数としての滑らかさが n と共にどのように変化するか実感せよ。

9　フーリエ変換と超関数

逆変換の公式をさらに解釈するために、

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) e^{i(x-y)\xi}$$

と書き直して、x と ξ の積分の順序を形式的に入れ替えると、

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(x-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\delta(y)dy,$$

なる関係式を得る。ここで、

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{ix\xi}$$

と形式的に定めた。上の式で $g(y) = f(-y)$ と置くと、

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\delta(y)dy = g(0)$$

が（少なくともなめらかで、有界な台をもつ）任意の関数 $g(y)$ に対して成り立つことになる。

このような関数 $\delta(y)$ は、非常に奇妙なものである。というのは、$g(y)$ として $y = a \neq 0$ の付近に台をもつものを取ると、

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} g(y)\delta(y) = 0 = g(0)$$

となることから、$\delta(a) = 0$ $(a \neq 0)$ でないといけないが、一方で、$g(y) = 1$ $(|y| \leq \epsilon)$ ととると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\delta(y)dy = g(0) = 1$$

であることから、$\delta(y)$ は $y = 0$ に 1 に相当する面積が集中していないといけない。

このように、常識では理解し難いものではあるが、次のように、デルタ関数を通常の関数で近似することができる。

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\xi^2 + ix\xi} d\xi = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} e^{-x^2/4a}$$

で $a \to +0$ とする。あるいは、

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} d\xi e^{ix\xi} = \frac{\sin(ax)}{\pi x}$$

で $a \to +\infty$ とすると wild な近似デルタ関数となる。

いずれにしても、$\delta(x)$ は、近似デルタ関数 $\varphi_a(x)$ の極限

$$\delta(x) = \lim_{a\to 0}\varphi_a(x)$$

として解釈される。ここで、近似デルタ関数 $\{\varphi_a\}$ の満たすべき要件としては、

(i) $\varphi_a(x)$ は通常の（それも何回でも微分できる）関数であり、

(ii) 滑らかで有界な台をもつ関数 $f(x)$ に対して、

$$\lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_a(x)\,dx = f(0)$$

が成り立つことである。

近似デルタ関数（列）の極限として、デルタ関数を解釈することは、示唆的ではあるが、厳密さという観点からは、難点がある。

数学的に厳密な解釈（の一つ）は、次のようなものである。

超関数としての解釈

まず、通常の関数でもそうであるが、関数の個々の点での値を直接決定するのは、それほど現実的ではない。大事な点は、関数 f の個々の値 $f(x)$ よりも、適当ななめらかさを仮定した関数 g （センサーの感度分布を表現している）に対して、積分値

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

が、どのような値を取るかである。その意味で、関数 f のかわりに、

$$g \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(y)dx$$

なる線型汎関数を代用にするというアイデアが浮かぶ。

すなわち、デルタ関数 δ とは、

$$g \mapsto g(0)$$

なる線型汎関数を象徴的に積分表示したものと捉える。そのような立場に立てば、近似デルタ関数 φ_a の定める（積分による）線型汎関数を同一の記号で表して、

$$\varphi_a(g) = \int g(x)\varphi_a(x)dx$$

$$\delta = \lim_{a \to +0} \varphi_a$$

なる線型汎関数の等式として、正当化することができる。ただし、数学的な厳密化のためには、汎関数の解析学が必要となり結構な準備を要する。

デルタ関数を含む「超関数」のもう一つの（ある意味で究極の）正当化は、regularization の方法によるものである。これは、

$$\int_0^\infty e^{\pm ix\xi} d\xi$$

の超関数としての意味を与えるために、いったん

$$\int_0^\infty e^{\pm i(x \pm i\epsilon)\xi} d\xi, \epsilon > 0$$

で置き換えて計算した後、$\epsilon \to +0$ とするもので、

$$\int_0^\infty e^{\pm ix\xi} d\xi = \lim_{\epsilon \to +0} \frac{1}{\epsilon \mp ix} = \frac{\pm i}{x \pm i0}.$$

ここで、右辺の超関数は次のように計算する。

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x \pm i0} f(x)\, dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x \pm i0} (f(x) - f(0) + f(0))\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x) - f(0)}{x}\, dx + f(0) \lim_{\epsilon \to +0} \lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} \frac{1}{x \pm i\epsilon}\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x) - f(0)}{x}\, dx \mp \pi i f(0).
\end{aligned}$$

ここで、

$$\left. \frac{f(x) - f(0)}{x} \right|_{x=0} = f'(x)$$

である。また、

$$2\pi\delta(x) = \frac{i}{x + i0} - \frac{i}{x - i0}$$

という関係式もわかるので、デルタ関数の分解をも与える。

このような計算方法は、実用数学でしばしば行われるが、その大きな問題点は、(i) このような regularization が常に可能か、(ii) また複数の regularization が考えられる場合、結果は、同一の超関数を定め得るか、である。これについては数学的説明（理論）が確立しているが、それなりに手間暇を必要とするので、ここではこれ以上深入りしない。L. Schwartz の distribution, I.M. Gelfand らの generalized function, 佐藤幹夫の hyperfunction など。

問 39. 正則化の方法を用いて、ガウス関数のフーリエ変換の公式

$$\int e^{-ax^2-ix\xi}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\xi^2/4a}$$

から、Fresnel 積分の公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx^2-ix\xi}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{it+0}}e^{i\xi^2/4t} \quad (t \neq 0)$$

を導け。ここで、$\sqrt{it+0}$ は、

$$\sqrt{it+0} = \begin{cases} |t|e^{\pi i/4} & \text{if } t > 0, \\ 0 & \text{if } t = 0, \\ |t|e^{-\pi i/4} & \text{if } t < 0 \end{cases}$$

で定められる $t \in \mathbb{R}$ の連続関数である。

課題：超関数の微分はどのように定義すべきか考察し、公式

$$h' = \delta$$

を正当化せよ。ここで、

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

である。（h はステップ関数または Heaviside function と呼ばれる。）

10　微分方程式とフーリエ変換

波動方程式(wave equation)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

を初期条件

$$u(0,x)=f(x),\qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=g(x)$$

の下で解いてみよう。

$$u(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v(t,\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

と表せば、初期条件より、

$$\begin{aligned}v(0,\xi)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ix\xi}dx,\\ \dot{v}(0,\xi)&=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-ix\xi}dx,\end{aligned}$$

波動方程式に代入すれば、

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(t,\xi)=-\xi^2 v(t,\xi)$$

となって、これを初期条件に注意して解けば、

$$v(t,\xi)=\frac{i\xi\widehat{f}(\xi)+\widehat{g}(\xi)}{2i\xi}e^{it\xi}+\frac{i\xi\widehat{f}(\xi)-\widehat{g}(\xi)}{2i\xi}e^{-it\xi}$$

$$u(t,x)=\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g(y)\,dy.$$

熱方程式(heat equation)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad (D>0)$$

を初期条件

$$u(0,x)=f(x)$$

の下で解いてみよう。

$$u(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix\xi}v(t,\xi)d\xi$$

と表せば、初期条件より、

$$v(0,\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{-iy\xi}dy.$$

また、上の $u(t,x)$ の表式を熱方程式に代入すると、

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,\xi) = -D\xi^2 v(t,\xi)$$

となるので、これを解くと、

$$v(t,\xi) = e^{-D\xi^2 t} v(0,\xi) = e^{-D\xi^2 t}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iy\xi}dy.$$

従って、

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y)\int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-Dt\xi^2 + i(x-y)\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4Dt)} f(y)\, dy \end{aligned}$$

と求まる。

とくに、$f(x) = \delta(x)$ の場合（原点 $x = 0$ を瞬間的に強く熱した場合）は、

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/(4Dt)}$$

となる。

問 40. 時間の経過とともに、上の特殊解がどのように変化（拡散）していくか、グラフにプロットせよ。

半平面での Dirichlet 問題。

半平面 $y \geq 0$ における**ラプラス方程式**(Laplace equation)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

を境界条件

$$f(x,0) = h(x), \qquad \lim_{y\to+\infty} f(x,y) = 0$$

の下で解いてみよう。

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi,y)e^{ix\xi}d\xi$$

を代入すると、

$$(i\xi)^2 F + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

となるので、

$$F(\xi, y) = A(\xi)e^{\xi y} + B(\xi)e^{-\xi y}$$

と解くことができる。ここでさらに境界条件を考慮に入れると、

$$F(\xi, y) = \frac{1}{2\pi}\widehat{h}(\xi)e^{-y|\xi|}$$

を得るので、

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{h}(\xi)e^{-|\xi|y}e^{ix\xi}d\xi = \frac{1}{2\pi}\iint dt d\xi\, h(t)e^{-y|\xi|}e^{i(x-t)\xi} \\ &= \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h(t)}{(x-t)^2 + y^2}dt \end{aligned}$$

と求められる。

11　周期関数とフーリエ変換

周期的な関数 $f(x + L) = f(x)$ のフーリエ変換を、超関数の立場から調べてみよう。まず、フーリエ展開により、

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{inx}$$

と書き表して、

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty}dx\sum_n f_n e^{-ix(\xi-n)} \\ &= \sum_n f_n\int_{-\infty}^{\infty}dx e^{-ix(\xi-n)} \\ &= 2\pi\sum_n f_n\delta(\xi - n) \end{aligned}$$

と計算すれば、周期関数のフーリエ変換がパルス関数（デルタ関数を平行移動したものの一次結合）で表されることがわかり、さらにこのパルス関数の逆フーリエ変換が、

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi e^{ix\xi}\widehat{f}(\xi) = \sum_n f_n e^{inx}$$

となりフーリエ展開式が復元する。

ついでに、周期的とは限らない関数 $f(x)$ から、

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi n)$$

で周期関数 g を作ったときのフーリエ係数を求めてみると、

$$\oint g(x)e^{-inx}dx = \sum_k \oint f(x+2\pi k)e^{-in(x+2\pi k)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-inx}dx = \widehat{f}(n)$$

となるので、次の等式を得る。

定理 11.1 (Poisson's summation formula).

$$\sum_n f(x + 2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_n \widehat{f}(n)e^{inx}.$$

とくに、$f(x) = \delta(x)$ ととると、

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x + 2\pi n).$$

関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $\widehat{f}(\xi)$ が、

$$\widehat{f}(\xi) = 0 \quad \text{for } |\xi| > \alpha$$

を満たすとき、$\widehat{f}(\xi)$ $(|\xi| \leq \alpha)$ を周期 2α の周期関数に拡張したものを g で表し、これにフーリエ展開を適用すれば、

$$\begin{aligned} g(\xi) &= \frac{1}{2\alpha}\sum_n e^{-i\pi n\xi/\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\widehat{f}(\eta)e^{i\pi n\eta/\alpha}d\eta \\ &= \frac{\pi}{\alpha}\sum_n e^{-i\pi n\xi/\alpha}f(\pi n/\alpha) \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}d\xi\frac{\pi}{\alpha}\sum_n f(\pi n/\alpha)e^{i\xi(x-\pi n/\alpha)} \\ &= \sum_n f(\pi n/\alpha)\frac{\sin(\alpha x - 2\pi n)}{(\alpha x - 2\pi n)} \end{aligned}$$

となる。すなわち、$f(x)$ の値がその離散化 $f(\pi n/\alpha)$ での値によって決定される。これを **sampling theorem** という。ここで、

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}|\widehat{f}(\xi)|d\xi < +\infty$$

であるから、$f(x)$ は、x の解析的関数であることに注意。

12　確率分布のフーリエ変換

確率変数と特性関数。中心極限定理。
確率変数の独立性と積の法則：

$$P(a \le X \le b, c \le Y \le d) = P(a \le X \le b)P(c \le Y \le d).$$

和の確率分布 $X+Y$:

$$\begin{aligned} P(a \le X+Y \le b) &= \iint_{a \le x+y \le b} \rho_X(x)\rho_Y(y)\,dxdy \\ &= \iint_{a \le u \le b} \rho_X(v)\rho_Y(u-v)\,dudv \\ &= \int_a^b \rho_X * \rho_Y(u)\,du. \end{aligned}$$

平均値

$$\begin{aligned} \int u\rho_X * \rho_Y(u)\,du &= \int u \int \rho_X(v)\rho_Y(u-v)\,dv\,du \\ &= \iint (x+y)\rho_X(x)\rho_Y(y)\,dxdy \\ &= \int x\rho_X(x)\,dx + \int y\rho_Y(y)\,dy \\ &= \mu_X + \mu_Y. \end{aligned}$$

合成積 $f * g$ の性質：$f * g = g * f$, $(f * g) * h = f * (g * h)$

問 41. 通常の関数を考える限り、合成積は単位元を持たない。

命題 12.1. 密度関数 ρ_j に従う互いに独立な確率変数 X_j $(1 \le j \le n)$ に対して、 確率変数 $X_1 + \cdots + X_n$ の密度関数は、合成積 $\rho_1 * \rho_2 * \cdots * \rho_n$ で与えられる。

また、期待値 μ と標準偏差 σ はそれぞれ、

$$\mu = \mu_1 + \cdots + \mu_n, \qquad \sigma^2 = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2.$$

確率変数 X に対して、その基準化を $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ で定めると、Z の密度関数 f は、X の密度関数 ρ を用いて、

$$f(z) = \sigma\rho(\sigma z + \mu)$$

で与えられる。

$X_1+\cdots+X_n$ の期待値は、$n\mu$, 標準偏差は $\sqrt{n}\sigma$ で与えられるので、その標準化は、

$$Z_n = \frac{X_1+\cdots+X_n-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

となる。

さて、$Y_j = X_j - \mu$ の密度関数を $g(y)$ で表せば、$Y_1+\cdots+Y_n$ の密度関数は、$g_n = g*\cdots*g$ となり、したがって Z_n の密度関数は、$h_n(z) = \sqrt{n}\sigma g_n(\sqrt{n}\sigma z)$ で与えられる。そのフーリエ変換は、

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\sigma\int_{-\infty}^{\infty}(g*\cdots*g)(\sqrt{n}\sigma)e^{-ix\xi}\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty}(g*\cdots*g)(y)e^{-iy\xi/(\sqrt{n}\sigma)}dy \\ &= \widehat{g}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}\sigma}\right)^n\end{aligned}$$

となる。そこで、$\widehat{g}$ を

$$\widehat{g}(t) = 1 - \frac{\sigma^2}{2}t^2 + \dots$$

とテーラー展開してみると、

$$\widehat{g}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}\sigma}\right)^n = \left(1-\frac{\xi^2}{2n}+\dots\right)^n \to e^{-\xi^2/2}$$

となるので、Z_n の密度関数は、$n\to+\infty$ のとき、

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\xi^2/2}e^{ix\xi}\,d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

に近づくであろうと予想される。

次の定理が成り立つ。

定理 12.2 (中心極限定理 (central limit theorem)). 任意の区間 $[a,b]$ に対して、

$$\lim_{n\to\infty}P(a\le Z_n\le b) = \int_a^b e^{-\xi^2/2}\,d\xi.$$

証明は、多少テクニカルである。

補題 12.3. $t=0$ の付近で、

$$\widehat{g}(t) = 1 - \frac{\sigma^2}{2}t^2 + o(t^2).$$

Proof. 不等式 $|y| \le y^2$ $(|y| \ge 1)$ に注意して評価すれば、

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y| g(y)\, dy \le 1 + \int_{-\infty}^{\infty} y^2 g(y)\, dy < +\infty$$

となり、これから $\widehat{g}$ は、二階連続微分可能で、

$$\widehat{g}(0) = 1, \qquad \widehat{g}'(0) = 0, \qquad \widehat{g}''(0) = -\sigma^2$$

であることがわかる。あとは、Taylor の定理により、

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(t) &= 1 + \int_0^t \widehat{g}''(s)(t-s)\, ds \\
&= 1 - \frac{\sigma^2}{2} t^2 + \int_0^t (\widehat{g}''(s) + \sigma^2)(t-s)\, ds \\
&= 1 - \frac{\sigma^2}{2} t^2 + o(t^2)
\end{aligned}$$

となる。 □

系 12.4. 任意の有界閉区間 $[\alpha, \beta]$ で、

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{h}_n(\xi) = \lim_{n\to\infty} \widehat{g}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}\sigma}\right)^n = e^{-\xi^2/2}$$

は、一様収束である。

Proof.

$$n \log \widehat{g}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}\sigma}\right) = n \log\left(1 - \frac{\xi^2}{2n} + o(\xi^2/n)\right) = n\left(-\frac{\xi^2}{2n} + o(\xi^2/n)\right) = -\frac{\xi^2}{2} + no(\xi^2/n)$$

は、$n \to \infty$ のとき、$\xi \in [\alpha, \beta]$ に対して一様に $-\xi^2/2$ に収束する。 □

補題 12.5. 関数 f, g が、$\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^1(\mathbb{R})$ であるとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)} f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{g}(\xi)} \widehat{f}(\xi)\, d\xi$$

である。f, $\widehat{g}$ が無限遠点で消える連続関数であることに注意。

Proof. 不等式

$$2\pi |(\widehat{f}|\widehat{g})| \le \|\widehat{f}\|_1 \|\widehat{g}\|_\infty \le \|\widehat{f}\|_1 \|g\|_1$$

などに注意すれば、両辺は $g \times \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R})$ の連続関数で、その密な部分 $L^1 \cap L^2$ では、等号が成り立つ。 □

系 12.6. 積分の評価式 $|\widehat{h}_n(\xi)| \leq 1$ に注意すれば、関数 $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ に対して、

$$\lim_{n\to\infty} \int h_n(x)f(x) = \frac{1}{2\pi}\int e^{-\xi^2/2}\widehat{f}(\xi)\,d\xi$$

が成り立つ。

以上の準備の下で、密度関数の正値性を使って、定理の証明を完成させよう。$h(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ とおく。$[a,b]$ の特性関数を f で表し、連続関数列 $0 \leq f_n^{\pm}(x) \leq 1$ を、台が有界で

$$f_n^-(x) \nearrow f(x) \swarrow f_n^+(x)$$

をみたすように取る。このとき、$\widehat{f_m^{\pm}} \in L^1$ であることに注意して

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int \overline{\widehat{h}_n}\widehat{f_m^-}\,d\xi = \int h_n(x)f_m^-(x)\,dx& \\ \leq \int h_n(x)f(x)\,dx \leq& \\ \int h_n(x)f_m^+(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int \overline{\widehat{h}_n}\widehat{f_m^+}\,d\xi&\end{aligned}$$

の極限を取ると、上の系により、

$$\int h(x)f_m^-(x)\,dx \leq \liminf \int h_n(x)f(x)\,dx \leq \limsup \int h_n(x)f(x)\,dx \leq \int h(x)f_m^+(x)\,dx$$

が得られる。そこで、さらに極限 $m \to \infty$ を取ると、

$$\int_a^b h(x)\,dx \leq \liminf \int h_n(x)f(x)\,dx \leq \limsup \int h_n(x)f(x)\,dx \leq \int_a^b h(x)\,dx$$

を得る。

13　不確定性原理とフーリエ変換

大道廃れて仁義あり。
不等式の本質は等式にある。
すべては、裏の世界の投影である。

量子確率論の考え方、単位ベクトルに関する作用素の平均値と分散。

$$\mu_f = \int_{-\infty}^{\infty} x|f(x)|^2dx, \quad \sigma_f = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_f)^2|f(x)|^2dx.$$

量子確率 (Quantum Probability), 作用素の期待値。$A^* = A$, $B^* = B$ に対して、$A_0 = A - (f|Af)$, $B_0 = B - (f|Bf)$ とおく。

$$0 \leq (f|(A_0 + itB_0)^*(A_0 + itB_0)f) = (f|A_0^2 f) + t^2(f|B_0^2 f) + it(f|[A_0, B_0]f)$$

より、

$$\frac{1}{4}|(f|[A,B]f)| \leq \sigma_A \sigma_B.$$

ここで、

$$\sigma_A = \sqrt{(f|A_0^2 f)}, \qquad \sigma_B = \sqrt{(f|B_0^2 f)}$$

である。

$A = x$, $B = -i\frac{d}{dx}$ とすると、$[A,B] = i$ 故、

$$\frac{1}{4}(f|f) \leq \sigma_A \sigma_B$$

となる。さらに、

$$\mu_B = (f| - i\frac{d}{dx}f) = (\widehat{f}|\xi\widehat{f}) = \mu_{\widehat{f}},$$

$$\sigma_B^2 = (\widehat{f}|(\xi - \mu_{\widehat{f}})^2\widehat{f}) = \sigma_{\widehat{f}}^2$$

に注意すれば、次の定理の前半を得る。

命題 13.1 (不確定性原理 (uncertainty principle)). 単位ベクトル $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して、

$$\sigma_f \sigma_{\widehat{f}} \geq \frac{1}{4}$$

であり、等号が成り立つのは

$$f(x) = Ce^{-tx^2+cx}, \quad t > 0, c, C \in \mathbb{C}$$

に限る。

等号成立条件は、$(B_0 + itA_0)f = 0$ であるので、f は、微分方程式

$$\left(\frac{d}{dx} - tx\right) f = cf$$

（$c \in \mathbb{C}$ は定数）を満たす。これを解いて、

$$f(x) = Ce^{tx^2/2+cx}$$

と形が決まる。これが、二乗可積分であるためには、$t > 0$ である必要があり、$c = a + ib$ と表示するとき、規格化条件から、

$$f(x) = \left(\frac{t}{\pi}\right)^{1/4} e^{-tx^2/2+cx-a^2/(2t)+i\theta}$$

となる。

逆に、このとき、計算により、

$$\sigma_f = \frac{1}{2t}, \qquad \sigma_{\hat{f}} = \frac{t}{2}$$

であるから、等号条件をみたす。

問 42. 上の証明で述べた計算を確かめよ。

問 43. 上記不等式の数学的な意味について説明を考えよ。量子力学の本をひも解き、不確定性原理の物理的意味を確かめよ。

14　聴覚器官とフーリエ近似

聴覚器官とフーリエ展開。

音（空気の振動）$\Rightarrow$ 鼓膜 $\Rightarrow$ 耳小骨 $\Rightarrow$ 内耳（リンパ液の振動）$\Rightarrow$ 蝸牛（かたつむり）の共鳴を通じて周波数成分の大きさに応じた場所に張りついている聴神経を刺激 $\Rightarrow$ 脳へ伝達。

数学的に解釈すると、音の信号をフーリエ変換して周波数特性関数を得、周波数域を 20Hz $\sim$ 20kHz 程度にカットし、固有の周波数域に localize された test function （蝸牛の特定部署に接続した聴覚神経に対応）による周波数特性関数の積分値の集まり、として音を認識しているらしい。

光の三原色は、感覚機構。光の場合は音と異なり、「共鳴」現象を利用し辛い。異なる周波数域で反応する 3 種類の神経細胞（網膜の内側にある）が刺激を受ける度合いで、光の周波数成分の違いを（部分的に）認識。赤 (750nm) 青緑 RGB、紫 (350nm) 。赤と青の混合が紫と認識されるのはなぜか。

立体感覚の起源は？

Digital Audio（コンパクト・ディスクなど）の原理。sampling frequency (音声、8kHz, CD, 44.1kHz)。

必要に応じて高周波成分をカットする low-pass filter を通す。sampling (抜き出し) を行う。信号の強さを離散化（量子化）。PCM (pulse code modulation)

AM (amplitude modulation) と FM (frequency modulation) 信号関数 $f(t)$ を周波数 ω で送信する方式として、

$$\begin{array}{cc} \text{AM} & f(t)e^{i\omega t} \\ \text{FM} & Ae^{i(\omega+f(t))t} \end{array}$$

問 44. 上の抜き書きを参考にして、聴覚とフーリエ変換について研究してみよう。

15 Radon 変換と CT

CT (computer tomography)、tomo (cut), anatomy。Johann Radon (1887–1956)

２次元のフーリエ変換。

$$\widehat{f}(\xi,\eta) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)e^{-ix\xi-iy\eta}dxdy,$$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}(\xi,\eta)e^{ix\xi+iy\eta}d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} F(r,\theta)e^{ir(x\cos\theta+y\sin\theta)}rdrd\theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(r,\theta) &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x',y')e^{-ir(x'\cos\theta+y'\sin\theta)}dx'dy' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}du\int_{\ell_{u,\theta}} f(x',y')e^{-iru}. \end{aligned}$$

ここで、

$$\int_{\ell_{\rho,\theta}} f(x',y')e^{-ir\rho} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u\cos\theta - v\sin\theta, u\sin\theta + v\cos\theta)dv$$

は、関数 $f(x,y)$ を直線 $x\cos\theta + y\sin\theta = \rho$ に制限したものの積分値で、これを (u,θ) の関数と思ったもの（f の Radon 変換という）を記号 $R_f(u,\theta)$ で表すことにすれば、

$$F(r,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_f(u,\theta)e^{-iru}du$$

となるので、$f(x,y)$ は、$R_f(u,\theta)$ から計算可能であることがわかる。$R_f(u,\theta+\pi) = R_f(-u,\theta)$ に注意。

これが断層撮影の数学的からくり。２次元フーリエ変換のちょっとした応用であるが、実際の計算にはフーリエ変換の数値計算が必要となり、計算機の高性能化を待ってはじめて実用的に可能になった。以上のような仕組みを（独立に）開発した A. Cormack と G. Hounsfeld は、１９７９年にノーベル生理学・医学賞受賞の栄誉に浴した。

16　有限フーリエ変換とその応用

１の冪根とその上の関数。周期が N の数列 $F(n+N) = F(n)$ $(n \in \mathbb{Z})$ 全体からなるベクトル空間 ℓ_N を考える。F を与えるかわりに、$C_N = \{z \in \mathbb{T}; z^N = 1\}$ 上の関数

$$\zeta^n \mapsto F(n) \in \mathbb{C}$$

を考えてもよい。ここで、$\zeta = e^{2\pi i/N}$ は 1 の原始 N 乗根である。周期が 2π の周期関数 $f(\theta+2\pi) = f(\theta)$ の近似情報

$$F(n) = f(2\pi n/N)$$

であるとみることもできる。そのように解釈すれば、内積

$$(f|g) = \int_0^{2\pi} \overline{f(\theta)}g(\theta)d\theta$$

は、和

$$(F|G) = \sum_{n=1}^{N} \overline{F(n)}G(n)\frac{2\pi}{N}$$

によって近似される。

さらにまた、フーリエ係数の方は、

$$f_m = \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-im\theta}\, d\theta$$

が有限和

$$\widehat{F}(m) = \sum_{n=1}^{N} f\left(\frac{2\pi n}{N}\right) e^{-im2\pi n/N} \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{N} \sum_{n=1}^{N} F(n) e^{-2\pi imn/N}$$

によって近似される。

数列 $\widehat{F}(m)$ は、$\widehat{F}(m+N) = \widehat{F}(m)$ をみたすので、これも ℓ_N に属することに注意しよう。

これは、フーリエ変換の有限版とでも呼ぶべきものであるが、応用数学の方面では、数学的には違和感があるものの、離散フーリエ変換 (discrete Fourier transform) と呼び習わされている。

連続的な積分が、有限和で近似されるように、フーリエ変換は、こういった有限和を求めることによって近似的に求められる。こういった、数値計算は、実際には計算機を使って実行されるのであるが、そのためには多数の積と和の計算を実行しなければならない。どの程度の計算量であるかを見積もるために、離散フーリエ変換の計算で必要とされる加減乗除の回数を近似の精度を表すパラメータである N を使って評価してみよう。

簡単のために、1 の N 乗根は予め全て計算してあり、また $2\pi/N$ の数値も必要な精度で値が用意してあったとすると、上の $\widehat{F}$ の計算式で、m を指定するごとに必要な計算量は、乗法が N 回、加法が $N-1$ 回、これに $2\pi/N$ の乗法 1 回を合計すると、$2N$ 回。以上が各 m ごとに必要であるから、$\widehat{F}$ を計算するためには、総計 $2N^2$ 回の計算ステップを必要とする。

以上は、何の工夫も施さない単純な計算方法によるステップ数の見積もりであった。これは、とくに N が大きい場合、計算機の性能を簡単に越えてしまうことが起こり得る。

これを回避する工夫として、N が素数の冪で表される場合に限定されるものの、この計算のステップ数を大幅に減らす方法が、Cooley と Tukey による**高速フーリエ変換** (Fast Fourier Transform) である。

その原理は、いたって単純で次のようなものである。（アルゴリズムそのものは、ガウスにまでさかのぼれるものであるらしい。）

記号として、$C_N = \{\zeta \in \mathbb{C}; \zeta^N = 1\}$ で N 乗根の作る（乗法的）巡回群を表し、対応

$$e^{2\pi ik/N} \mapsto F(k)$$

により、$F \in \ell_N$ を $_N$ 上の関数と同一視しておく。

補題 16.1. ℓ_N に属するすべての関数（ベクトル）に対して、M 回の計算量でそのフーリエ変換 $\widehat{F}$ が計算できるものと仮定する。

このとき、ℓ_{2N} に属する任意の関数 G に対して、そのフーリエ変換 $\widehat{G}$ は、$2M + 6N$ 回の計算量で求めることができる。

Proof. 関数 $G \in \ell_{2N}$ に対して、

$$G_0(k) = G(2k), \qquad G_1(k) = G(2k+1) \qquad (1 \leq k \leq N)$$

とおくと、$G_j \in \ell_N$ であるので、これらのフーリエ変換 $\widehat{G_0}, \widehat{G_1}$ は $2M$ 回の計算量で求められる。一方、

$$\begin{aligned}
\widehat{G}(m) &= \frac{2\pi}{2N} \sum_{k=1}^{2N} G(k) e^{-2\pi imk/(2N)} \\
&= \frac{\pi}{N} \left(\sum_{k=1}^{N} G(2k) e^{-2\pi imk/N} + \sum_{k=1}^{N} G(2k+1) e^{-2\pi imk/N} e^{-\pi im/N} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\widehat{G_0}(m) + \widehat{G_1}(m) e^{-\pi im/N} \right)
\end{aligned}$$

は、さらに 3 ステップの加減乗除で表されるので、$1 \leq m \leq 2N$ 全体では、

$$3 \times 2N = 6N$$

ステップの計算量が加算されるだけである。 □

さて、$N = 1 = 2^0$ に対しては、計算する必要はないので、フーリエ変換を求めるステップ数 $M(0) = 0$ でよい。$N = 2 = 2^1$ に対しては、上の補題より、$M(1) = 2M(0) + 3 \times 2^1$ ステップでフーリエ変換の計算が可能である。以下、帰納的に $N = 2^n$ に対して、ℓ_N に属するどの関数に対しても高々 $M(n)$ 回の計算量で、そのフーリエ変換が求められることがわかる。ここで、$M(n)$ は、

$$M(n) = 2M(n-1) + 32^n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

によって帰納的に定められる数列である。一般項を具体的に求めるために、上の漸化式を

$$\frac{M(n)}{2^n} = \frac{M(n-1)}{2^{n-1}} + 3$$

と書き直すと、$M(n)/2^n$ は等差数列であることがわかるので、$M(n)/2^n = 3n$、すなわち

$$M(n) = 3n2^n = 3N\log_2 N$$

であることがわかる。

これが $2N^2$ に比べてどれだけ「高速」であるかというと、例えば、$n = 10,\ N = 2^{10} = 1024$ とすると、

$$\frac{3N\log_2 N}{2N^2} = \frac{3n}{2^{n+1}} = \frac{1}{51.2}$$

となり、大体５０分の１のステップで済むことがわかる。

問 45. N を１万以上にした場合、どれだけ高速になっているか見積もってみよ。

問 46. 同様の計算方法は 2 以外の冪についても可能である。$N = d^n$ $(d \geq 2)$ とした場合のステップ数 $M_d(n)$ について評価式を求めよ。（上の計算から、$M_2(n) = 3n2^n$ である。）

数論への応用（ガウス和）。

17　等周問題

等周問題 (isoperimetric problem) とは。等周不等式 (isoperimetric inequality) の A. Hurwitz による証明。$4\pi A \leq l^2$.

単純閉曲線 C を、$z(s)$ $(0 \leq s \leq 1)$, $z(0) = z(1)$ とパラメータ表示。曲線 C の長さは、

$$l = \int_0^1 \left|\frac{dz}{ds}\right| ds$$

で与えられる。さらに、パラメータを s から、

$$t = \frac{2\pi}{l}\int_0^s \left|\frac{dz}{ds}\right| ds$$

に換えると、$0 \le t \le 2\pi$ かつ

$$\left|\frac{dz}{dt}\right| = \frac{l}{2\pi}$$

となるので、

$$l^2 = 2\pi \int_0^{2\pi} \left|\frac{dz}{dt}\right|^2 dt$$

となる。

次に、線積分の公式から、曲線の向きを反時計回りにとるとき、C の囲む面積は、

$$A = \oint x\,dy = \int_0^{2\pi} \frac{z+\overline{z}}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right) dt$$

で計算できるので、$z(0) = z(2\pi)$ に注意して積分値が消える項を落とすと、

$$A = \frac{1}{4i}\oint(\overline{z}dz - zd\overline{z}) = \frac{1}{2}\Im\int_0^{2\pi} \overline{z}\frac{dz}{dt}dt$$

となる。

以上の表示を使うと、

$$\frac{l^2}{2\pi} - 2A = \int_0^{2\pi} \frac{dz}{dt}\frac{d\overline{z}}{dt} - \Im\left(\int_0^{2\pi} \overline{z}\frac{dz}{dt}dt\right)$$

となる。

最後に、周期関数 $z(t)$ を、

$$z(t) = \sum_n c_n e^{int}$$

とフーリエ展開し、積分を計算すると、

$$2\pi l^2 - 2A = 2\pi\sum_n (n^2 - n)|c_n|^2$$

となって、$n^2 - n \ge 0$ $(n \in \mathbb{Z})$ から、求める等周不等式を得る。

また、等号が成立するのは、$n^2 - n \ne 0$ となる n に対して、$c_n = 0$ である場合、すなわち、

$$z(t) = c_0 + c_1 e^{int}$$

の場合であるから、曲線 C は、円 (中心が c_0 で半径が $|c_1|$) のときである。

A　確率変数と密度関数

確率現象の結果に数値を対応させる規則を確率変数と呼ぶ。確率変数 X が与えられると、範囲の確率 $P(a \leq X \leq b)$ などが意味をもつ。以下では、範囲の確率が、

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \rho(x)\,dx = 1.$$

という積分の形で計算できる場合を問題にしよう。ここで、関数 ρ は、確率密度関数と呼ばれるもので、$\rho(x) \geq 0$ であり、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\,dx = 1$$

を満たすものである。

確率変数の式（関数）とその期待値：

$$\langle f(X) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho(x)\,dx.$$

平均値と分散。

$$\mu = \langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)\,dx, \qquad \sigma^2 = \langle (X-\mu)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \rho(x)\,dx.$$

確率変数の変数変換：

$$P(a \leq \alpha X + \beta \leq b) = \int_{a \leq \alpha x + \beta \leq b} \rho(x)\,dx = \int_a^b \rho\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)\frac{1}{\alpha}dy.$$

複数の確率変数を扱う場合には、確率密度関数は多変数となる。これを同時密度関数と称する。例えば、一つの確率現象に対して、その結果に数値を対応させる二つの方法（確率変数）X, Y があったとすると、

$$P(a \leq X \leq a', b \leq Y \leq b') = \iint_{a \leq x \leq a', b \leq y \leq b'} \rho(x,y)\,dxdy.$$

同時密度関数と個々の確率変数の密度関数とは次の関係で結ばれている。

$$\rho_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x,y)\,dy,$$
$$\rho_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x,y)\,dx.$$

多変数の確率分布においても確率変数の変数変換を考えることができる。簡単のために、一次式による変数変換を考えてみよう。

$$X' = aX + bY, Y' = cX + dY.$$

このとき、積分の変数変換の公式を使えば、

$$\int_{D'} \rho'(x', y') dx'dy' = \int_D \rho'(ax+by, cx+dy)(ad-bc) dxdy = \int_D \rho(x, y) dxdy$$

より、

$$(ad - bc)\rho'(ax + by, cx + dy) = \rho(x, y)$$

という密度関数の間の関係式が得られる。したがって、

$$\begin{aligned}
\langle aX + bY \rangle &= \iint x' \rho'(x', y') dx'dy' \\
&= \iint (ax + by)\rho'(ax + by, cx + dy)(ad - bc) dxdy \\
&= \iint (ax + by)\rho(x, y) dxdy \\
&= a\langle X \rangle + b\langle Y \rangle
\end{aligned}$$

が成り立つ。これを期待値の線型性と呼ぶ。とくに、$\mu_{X+Y} = \mu_X + \mu_Y$ である。