問題 $\boxed{1}$ は解答用紙の表に、問題 $\boxed{2}$ は裏に解答すること。

$\boxed{1}$ 関数 $f(x) = e^{-a|x|}$ ($a > 0$ はパラメータ) について、

(i) $f(x)$ のフーリエ変換

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

を求めよ。

(ii) フーリエ変換の逆変換について説明し、上で与えた f の場合の具体的な関係式を求めよ。

$\boxed{2}$

(i) ガウス積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

を利用して、積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} dx, \qquad t > 0 \text{ はパラメータ}$$

を t の式で表せ。

(ii) 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} x^{2m} dx, \qquad t > 0, m = 1, 2, \ldots$$

を求めよ。

(iii) 級数展開

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2 - ix\xi} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\xi)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} x^n \, dx$$

を利用して、e^{-tx^2} のフーリエ変換を求めよ。