複素解析学 II 2 回目 (2001/12/21)

問題 $\boxed{1}$ は解答用紙の表に、問題 $\boxed{2}$ は裏に解答すること。

$\boxed{1}$

(i) 1 の原始 8 乗根 $\omega = e^{\pi i/4}$ に対して、複素関数 $\dfrac{1}{z^2 - i}$ の $z = \omega$ における留数を求めよ。

(ii) 与えられた正数 $R > 1$ に対して、複素平面内の曲線 C_j $(j = 1, 2)$ を、C_1: $z = x$ $(-R \leq x \leq R)$, C_2: $z = Re^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ で定めるとき、線積分

$$\int_{C_1} \frac{1}{z^2 - i} dz + \int_{C_2} \frac{1}{z^2 - i} dz$$

の値を留数定理により求めよ。

(iii) (ii) で得られた関係式において $R \to \infty$ として、積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - i} dx$$

の値を求めよ。

$\boxed{2}$

(i) 複素平面で、0 を中心とする半径 1 の円周に沿って反時計まわりに 1 から i に至る曲線を C で表すとき、線積分

$$\int_C \frac{1}{\zeta} \, d\zeta$$

の値を求めよ。

(ii) 与えられた複素数 z (ただし、$|z - i| < 1$ とする) に対して、i と z を結ぶ線分 C_z をパラメータ t を使って、$(1 - t)i + tz$ $(0 \leq t \leq 1)$ と表すとき、線積分

$$\int_{C_z} \frac{1}{\zeta} \, d\zeta$$

を t に関する定積分の形に書き直せ。

(iii) 対数関数 $\log x$ $(x > 0)$ を $x = 1$ から出発して、(i) で与えた曲線 C に沿って解析接続して得られる複素対数関数 $\log z$ の $z = i$ の付近でのテーラー展開を 5 次の項まで求めよ。