A Primer to Ordinary Differential Equations

Yamagami Shigeru

平成 13 年 2 月 8 日

1 微分方程式とは

自然現象（とくに物理現象）の多くは、考察の対象としている量の微分を含んだ式で記述される。

- Newton の運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x).$$

- (logistic equation)

$$\frac{dx}{dt} = (a - bx)x$$

($a > 0$ は人口増加率、$b > 0$ は人口抑制係数)

- 波動方程式

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0.$$

- 拡散方程式

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = c\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}.$$

- Schrödinger 方程式

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi + V(x, y, z)\varphi.$$

以下、(i), (ii) の場合のように変数が１個の場合（変数は、しばしば時間の意味をもつので、t で表す）を扱う。それに対して、偏微分が関係してくる方程式をとくに、偏微分方程式と呼ぶ。

2　積分による解法

例題 2.1.

(i) $\dfrac{dx}{dt} = f(t)$ のときは、解 $x(t)$ は $f(t)$ の原始関数に他ならない。

(ii) $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$ のときは、変数変換 $t \mapsto x(t)$ による置換積分を考えると、

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{f(x)} dx = \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0$$

となるので、これを x について解けばよい（x を t で表す)。例えば、$\dfrac{dx}{dt} = \lambda x$ (λ は実定数) のときは、

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{x} dx = \int_{0}^{t} \lambda dt \Longrightarrow \log x - \log x_0 = \lambda t$$

を解いて、$x = x_0 e^{\lambda t}$ となる。($\lambda < 0$ の時には、放射性物質の割合の変化を記述する。)

上の例でみたような、$\dfrac{dx}{dt}$ の形の微分だけが現れる方程式は、($\frac{dx}{dt}$ について解くことにより）一般に、

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

の形に書き直すことができる。

例題 2.2. 上の一般形で、$f(t, x) = \varphi(t)\psi(x)$ と積の形に分解できるときは、上の (ii) の解法に倣って、

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\psi(x)} dx = \int_{t_0}^{t} \varphi(t) dt$$

を計算して、その結果を x について解けばよい。

例題 2.3. Logistic equation で、x の単位を適当に取ると、$b = 1$ と仮定してよい。このとき、

$$\int \frac{1}{(a-x)x} dx = \frac{1}{a} \int \left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{x} \right) dx = -\frac{1}{a} \log(a-x) + \frac{1}{a} \log x$$

であるから、

$$-\log(a-x)+\log x = at - C' \iff \frac{x}{a-x} = Ce^{at}$$

となって、

$$x = \frac{aCe^{at}}{1+Ce^{at}}$$

が得られる。

問

(i) 上で求めた解で、C を $t=0$ での x の値 c を使って表せ。

(ii) 解の分母が 0 になることがあるかどうかで場合を分けて、解のグラフの概形を描け。解の「爆発」がおこるのはどのような時か。

3 ベクトル場と解曲線

関数 $x=x(t)$ の2階の微分を含んだ微分方程式の一般形は、

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t, x, \frac{dx}{dt})$$

である。この式で $y = \dfrac{dx}{dt}$ とおくと、

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = f(t,x,y) \end{cases}$$

と連立の形に書き直せる。より一般に、

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = g(t,x,y) \\ \frac{dy}{dt} = f(t,x,y) \end{cases}$$

という2個（未知関数も2個）の連立1階微分方程式は、1個の2階微分方程式を特別な場合として含む。同様に、1個の n 階微分方程式は、n 個の連立1階微分方程式はの形に書くことができる。そこで、以下、1階の連立微分方程式を中心に調べることにしよう。

問 未知関数1個の3階微分方程式を、未知関数3個の連立方程式の形に書き直せ。

幾何学的解釈

上記の連立微分方程式を考える。t を時間のパラメータと思うと、関数の組み、$f(t,x,y)$, $f(t,x,y)$ は、時間 t に依存したベクトル場

$$\vec{v}(t,x,y) = (g(t,x,y), f(t,x,y))$$

を表していると思うことができる。一方、連立微分方程式の解 $x(t)$, $y(t)$ は、平面上の曲線

$$\vec{p}(t) = (x(t), y(t))$$

を表していると解釈すれば（この意味で解曲線と呼ぶ)、考えている微分方程式は、曲線 $\vec{p}(t)$ でその時刻 t における接ベクトル $\dfrac{d\vec{p}}{dt}$ が、点 $\vec{p}(t)$ におけるベクトル場 $\vec{v}(t,\vec{p}(t))$ の値に等しいもの、すなわち、連立微分方程式は

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v}(t,\vec{p})$$

をみたす曲線 $\vec{p}(t)$ (ベクトル場の解曲線）を規定する方程式と解釈することができる。

例題 3.1. 与えられた実数 ω に対して、

$$\frac{dx}{dt} = \omega y, \quad \frac{dy}{dt} = -\omega x$$

は、同心円状のベクトル場

$$\vec{v}(x,y) = \omega(y,-x)$$

の解曲線に対する方程式である。

4 解の一意性

微分方程式の解に対して、与えられた時刻 t_0 で、点 (x_0, y_0) を通るという形の条件を **初期条件** という。与えられた初期条件に対して、それを満たす解は、通常一つだけ決まる（解の一意性定理)。より正確には、

定理 4.1. ベクトル場、$\vec{v}(t,x,y)$ が x, y について偏微分可能で、x, y について偏微分した結果が、(t,x,y) の連続関数であるならば、2つの解曲線 $(x(t), y(t))$, $(X(t), Y(t))$ $a < t < b$ があって、ある時刻 s で一致していれば（$x(s) = X(s)$, $y(s) = Y(s)$)、全ての時刻で一致する

$$(x(t), y(t)) = (X(t), Y(t)), \qquad a < t < b.$$

証明を始める前に、ベクトル値関数の積分についての注意：

$$\vec{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)) \in \mathbb{R}^n$$

なるベクトル値連続関数に対してその（リーマン）積分

$$\int_a^b \vec{f}(t)dt \in \mathbb{R}^n$$

が定義できて、

$$\int_a^b \vec{f}(t)dt \in \mathbb{R}^n = (\int_a^b f_1(t)dt, \dots, \int_a^b f_n(t)dt)$$

を満たす（これを定義と思ってもいいのだが、そうすると次の不等式の証明で困ることになる)。さらに、不等式

$$\left\| \int_a^b \vec{f}(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|\vec{f}(t)\| dt$$

も成り立つ。

補題 4.2 (Lipschitz' continuity). 記号の変更。

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (x_1, \dots, x_n), \\ \vec{f}(t, \vec{x}) &= (f_1(t, \vec{x}), \dots, f_n(t, \vec{x})), \\ \vec{f}'(t, \vec{x}) &= \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, \vec{x}) \right). \end{aligned}$$

定理の条件の元で、

$$\|\vec{f}(t, \vec{x}) - \vec{f}(t, \vec{y})\| \leq L \|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

ここで、

$$L = \sup\{\|\vec{f}'(t, \vec{x})\|_{HS}; t, \vec{x}\}$$

Proof.

$$\frac{d}{ds}\vec{f}(t, \vec{x} + s(\vec{y} - \vec{x})) = \sum_j (y_j - x_j) \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j}(t, \vec{x} + s(\vec{y} - \vec{x}))$$

を積分すると、

$$\vec{f}(t,\vec{y}) - \vec{f}(t,\vec{x}) = \int_0^1 \sum_j (y_j - x_j) \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j}(t, \vec{x} + s(\vec{y} - \vec{x}))ds$$

となって、これから

$$\begin{aligned} \|\vec{f}(t,\vec{x}) - \vec{f}(t,\vec{y})\| &\leq \int_0^1 \sum_j |y_j - x_j| \left\| \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j}(t, \vec{x} + s(\vec{y} - \vec{x})) \right\| ds \\ &\leq \|\vec{y} - \vec{x}\| \int_0^1 \|\vec{f}'(t, \vec{x} + s(\vec{y} - \vec{x}))\|_{\mathrm{HS}} ds. \end{aligned}$$

□

さて、2 つの解 $\vec{x}(t)$, $\vec{y}(t)$ が初期条件 $\vec{x}(0) = \vec{c} = \vec{y}(0)$ を満すとすると、

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \vec{c} + \int_0^1 \vec{f}(s, \vec{x}(s))ds, \\ \vec{y}(t) &= \vec{c} + \int_0^1 \vec{f}(s, \vec{y}(s))ds \end{aligned}$$

であるので、差のノルムを計算すると、

$$\|\vec{x}(t) - \vec{y}(t)\| \leq \int_0^t \|\vec{f}(s, \vec{x}(s)) - \vec{f}(t, \vec{y}(s))\| ds \leq L \int_0^t \|\vec{x}(s) - \vec{y}(s)\| ds$$

となる。そこで、関数

$$F(t) = \|\vec{x}(t) - \vec{y}(t)\|$$

に次の補題を適用すれば、$\vec{x}(t) = \vec{y}(t)$ が $t = 0$ の近くで成り立つことがわかり、従って、すべての t で等しい。

補題 4.3. 連続関数 $F(t) \geq 0$ で、

$$F(t) \leq L \int_0^t F(s)ds$$

をみたすものがあれば、$F(t) \equiv 0$ である。

Proof. 任意に与えられた正数 τ に対して、

$$M = \max\{F(t); 0 \leq t \leq \tau\}$$

とおくと、

$$F(t) \leq L \int_0^t F(s)ds \leq LMt, \quad 0 \leq t \leq \tau$$

である。これを再度、与えられた不等式に使うと

$$F(t) \leq L \int_0^t F(s)ds \leq L \int_0^t LMsds = \frac{1}{2}L^2Mt^2.$$

以下、これを繰り返すと、

$$F(t) \leq \frac{1}{n!}L^nMt^n, \qquad n \geq 1$$

が得られるので、極限 $n \to \infty$ を考えると、$F(t) = 0$ であることが分かる。 □

べき級数

べき級数

$$\sum_{n \geq 0} c_n t^n$$

の収束半径は、

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}}$$

で与えられ、べき級数は $|t| \leq r < R$ の上で一様収束し、したがって連続関数

$$f(t) = \sum_{n \geq 0} c_n t^n, \qquad |t| < R$$

を与える。

補題 4.4. 関数 $f(t)$ は、微分可能で、

$$f'(t) = \sum_{n \geq 1} nc_n t^{n-1}.$$

Proof. まず、べき級数

$$g(t) = \sum_{n \geq 1} nc_n t^{n-1}$$

の収束半径も R であることに注意する。とくに、関数 $g(t)$ は、$|t| < R$ で連続。さらに、$|t| \leq r < R$ で、

$$
\begin{aligned}
\left| \int_0^t (g(s) - \sum_{n=1}^{N} n c_n s^{n-1}) ds \right| &\leq \int_0^t \sum n \geq N + 1 n |c_n| s^{n-1} ds \\
&\leq \int_0^t \sum n \geq N + 1 n |c_n| r^{n-1} ds \\
&= \left(\sum_{n \geq N+1} n |c_n| r^{n-1} \right) |t| \to 0 \quad (N \to \infty)
\end{aligned}
$$

より、

$$\int_0^t g(s) ds = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} c_n t^n = \sum_{n \geq 1} c_n t^n$$

となって、

$$f(t) = c_0 + \sum_{n \geq 1} c_n t^n = c_0 + \int_0^t g(s) ds$$

は微分可能かつ、

$$f'(t) = g(t) = \sum_{n \geq 1} n c_n t^{n-1}$$

がわかる。 □

命題 4.5. 与えられた実数 α に対して、

$$(1+t)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} t^n, \qquad |t| < 1.$$

Proof. 関数 $f(t)$ を

$$f(t) = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} t^n$$

で定めると、

$$(n+1) \binom{\alpha}{n+1} + n \binom{\alpha}{n} = \alpha \binom{\alpha}{n}$$

より、

$$(1+t) f'(t) = \alpha f(t)$$

である。一方、関数 $(1+t)^\alpha$ もこの微分方程式の解であり、$t = 0$ での値は $f(0)$ に一致する。従って、解の一意性により、求める関係式を得る。 □

問　他の初等関数の Taylor 展開についても、微分方程式の解の一意性を使って証明してみよ。

例題 4.6 (三角関数の加法公式). 与えられた実数 s に対して、2 つの曲線

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(s+t) \\ \sin(s+t) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos s \cos t - \cos s \cos t \\ \cos s \sin t + \sin s \cos t \end{pmatrix}$$

は、どちらも微分方程式

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

の解で、初期条件 $(x(0), y(0)) = (\cos s, \sin s)$ をみたす。したがって、解の一意性により、一致する。これすなわち、三角関数の加法公式に他ならない。

問　指数法則 $e^{s+t} = e^s e^t$ を上の流儀で証明してみよ。

解の一意性が成り立たない例としては、当然 Lipschitz 連続性がくずれる関数 $f(x)$ を考えないといけないが、実際そのような例として

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha & \text{if } x \geq 0, \\ -|x|^\alpha & \text{if } x \leq 0 \end{cases}$$

$(0 < \alpha < 1)$ がある。この関数は原点で微分できない、のみならず、Lipschitz 連続性も原点で破綻する。この場合でも、変数分離法を適用して積分を計算すると、

$$t = \int_0^x x^{-\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}$$

となって、これから

$$x(t) = (1-\alpha)^{1/(1-\alpha)} |t|^{1/(1-\alpha)}$$

という解の候補が得られる。これは、たしかに原点で微分可能で、微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

の解になっていて、$x(0) = 0$ である。ところが、この初期条件を満たす解としては、$x(t) \equiv 0$ もあるのであって、解の一意性は満たされない。

5　ベクトル場の第一積分

与えられた2次元ベクトル場、$\vec{v}(x,y)$ に対して、関数 $F(x,y)$ で、どのような解曲線 $(x(t),y(t))$ を取ってきても、

$$F(x(t),y(t))$$

が t によらない、すなわち、

$$\frac{d}{dt}F(x(t),y(t)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x(t),y(t))\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial Y}(x(t),y(t))\frac{dy}{dt}$$

が成り立つようなものをベクトル場の（第一）**積分** とよぶ。$(x(t),y(t))$ がベクトル場 $(f(x,y),g(x,y))$ の解曲線であることを使えば、上の条件は、

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)f(x,y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)g(x,y) = 0$$

と同値であるので、$F(x,y)$ は、偏微分方程式

$$f(x,y)\frac{\partial F}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

の解である、ということもできる。

例題 5.1. ベクトル場が、関数 $H(x,y)$ を使って

$$\vec{v}(x,y) = \left(\frac{\partial H}{\partial y}(x,y), -\frac{\partial H}{\partial x}(x,y)\right)$$

と書けるならば（このようなベクトル場あるいは微分方程式をハミルトン系という）、$H(x,y)$ はこのベクトル場の積分を与える。

振り子の運動方程式

振り子の振幅を角度 x で表せば、適当な単位のもとで、その運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\sin x$$

となる。これを１階の方程式に書き直すと、

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y,\\ \frac{dy}{dt} &= -\sin x.\end{aligned}$$

これは、ハミルトン系である。実際、

$$H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - \cos x$$

がハミルトン関数になっている（これは、系の力学的エネルギーを表している）。

さて、振り子の運動方程式の解 $(x(t), y(t))$ に対して、

$$H(x(t), y(t)) = c$$

は、t によらないので、解曲線 $(x(t), y(t))$ は、ハミルトン関数 H の等高線上を移動する。そこで、H の等高線の様子は、振り子の解に対する重要な情報を与える。

また、上の関係式を $y(t)$ について解けば、

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{2(c+\cos x)}$$

なる1階の方程式が得られ、解の時間発展に関する具体的な情報を与える。

<u>問</u> c の値で場合分けして、H の等高線の様子を図示せよ。振り子の運動学的な様子についても併せて説明せよ。

Volterra の生存競争モデル

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x - \beta xy, \\ \frac{dy}{dt} &= -\gamma y + \delta xy, \\ &\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0. \end{aligned}$$

x, y は生物の個体数を表しているので、$x > 0$, $y > 0$ の場合を考える。

<u>問</u> $x' = ax$, $y' = by$, $t' = ct$ とスケールを変えることにより、

$$\beta = \gamma = \delta = 1$$

と取れることを示せ。

以下、簡単のために $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ と仮定する。このとき、上の方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\log x &= 1 - y, \\ \frac{d}{dt}\log y &= -1 + x \end{aligned}$$

と書き直すことができる。一方

$$\frac{d}{dt}(x+y) = x - y$$

であるから、これらの式から $x-y$ を「消去」してやると、

$$\frac{d}{dt}\left(\log x + \log y - x - y\right) = 0$$

となって、関数 $\log x + \log y - xy$, あるいは、関数

$$F(x,y) = xye^{-x-y}$$

が系の積分を与える。

<u>問</u>

(i) 関数 $F(x,y)$ の特異点を計算し、等高線の様子を調べよ。

(ii) $\alpha \neq 1$ のときに、第一積分を求めよ。

ここで関数の特異点について復習。ヘッセ行列 (Hessian) とその符号。変数変換の説明。特異点の分類と標準形。

微分方程式への応用として、ハミルトン系における周期解の存在。$H(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ のとき。特異点は、 $(0,0)$, $(1,1)$ で、$(0,0)$ は鞍点、$(1,1)$ は極小点。

6　ベクトル場の特異点と線型化

与えられたベクトル場 $(f(x,y), g(x,y))$ に対して、その**特異点** (singular point)（あるいは不動点）を、

$$f(a,b) = g(a,b) = 0$$

となる点 (a,b) であると定義する。

前節でみたようにハミルトン系の場合、ベクトル場は、

$$\left(\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x}\right)$$

で与えられ、この特異点とハミルトン関数 $H(x,y)$ の特異点は一致する。

ベクトル場が特異点 (a,b) をもつとき、定数関数

$$(x(t),y(t))=(a,b)$$

は微分方程式

$$\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)=(f(x,y),g(x,y))$$

の解である。逆に定数関数 $(x,y)=(a,b)$ が解であれば、点 (a,b) はベクトル場 $(f(x,y),g(x,y))$ の特異点（不動点）である。このような解を定常解 (stationary solution) ともいう。

ベクトル場の特異点 (a,b) の付近での様子は、１次の近似式

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)+o(|x-a|+|y-b|)$$
$$g(x,y)=g(a,b)+\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)(y-b)+o(|x-a|+|y-b|)$$

を使えば、よりやさしい方程式

$$\begin{pmatrix}\frac{dx}{dt}\\ \frac{dy}{dt}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x-a\\ y-b\end{pmatrix}$$

が良い近似を与えるであろう。ここで、A は

$$A=\begin{pmatrix}f_x(a,b) & f_y(a,b)\\ g_x(a,b) & g_y(a,b)\end{pmatrix}$$

なる定数行列を表す。x, y の代りに、$\xi=x-a$, $\eta=y-b$ を使えば、上の方程式は

$$\begin{pmatrix}\frac{d\xi}{dt}\\ \frac{d\eta}{dt}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

となる。これをもとの微分方程式の特異点 (a,b) における**線型化** (linearization) と呼ぶ。

例題 6.1. 振り子の運動方程式の線型化は、単振動の方程式。２種類の特異点を求める。

例題 6.2 (van del Pol 方程式).

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt} & =y\\ \frac{dy}{dt} & =-x+a(1-x^2)y\end{cases},\qquad a\text{ は実パラメータ.}$$

7 線型微分方程式

与えられた $n \times n$ 行列 A に対して、(連立）微分方程式

$$\dot{x} = Ax, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

を考える。これは著しい性質をもちかつ重要な方程式のクラスである。

命題 7.1. 線型微分方程式の解全体はベクトル空間を成す。解の重ね合せ。

$n = 1$ の時は、指数関数を表す微分方程式で、初期条件 $x(0) = x_0$ をみたす解は

$$x(t) = e^{At}x_0$$

で与えられる。

一般の n に対しても、行列の指数関数 e^{At} を

$$e^{At} = I + tA + \frac{1}{2}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \dots$$

で定義すれば、微分の関係式

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$$

をみたすので、初期条件 $x(t) = x_0$ の解はやはり、

$$x(t) = e^{tA}x_0$$

と書き表すことができる。この表示（考え）は理論的に非常に重要であるが、解の具体的な形を求めるためには、別の工夫が必要である。

固有値と固有ベクトル。行列 A の固有ベクトル

$$Au = \lambda u$$

がみつかれば、微分方程式の解を

$$x(t) = \varphi(t)u$$

の形のなかから捜すことにより、初期条件 $x(0)=u$ をみたす解は

$$x(t)=e^{\lambda t}u$$

であることがわかる。これは、上の行列の指数関数による表示を使ってもすぐわかる。

一般に固有ベクトルが沢山（というか最大個数）あるときには、このようにして解の具体的な表示を得ることができる。

(i) 固有ベクトルからなる基底 $\{u_1,\dots,u_n\}$ を取ってくる。

(ii) 与えられた初期値ベクトル x_0 を上で求めた固有ベクトルを使って、

$$x_0=\xi_1 u_1+\cdots+\xi_n u_n$$

と表す。

(iii) 微分方程式の初期条件 $x(t)=x_0$ をみたす解は

$$x(t)=e^{\lambda_1 t}\xi_1 u_1+\dots e^{\lambda_n t}\xi_n u_n$$

で与えられる。

例題 7.2.

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

のとき、初期条件

$$x(0)=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

を満たす解を求めよ。固有ベクトルを使う方法または e^{tA} を直接計算する。

問

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & a\end{pmatrix}$$

の場合を調べ、

$$x(0)=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

となる解を具体的に求めよ。

ここで、微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

で解

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

を複素数値関数の範囲で捜すことの意義について説明。

例題 7.3. 与えられた複素数 $c = a + ib$ に対して、複素数値関数 $z(t)$ で、微分方程式

$$\frac{dz}{dt} = cz(t)$$

満たすものは、

$$z(t) = z(0)e^{ct} = z(0)e^{at}(\cos(bt) + i\sin(bt))$$

である。

これを使えば、固有値が実数でないときは、とりあえず、（成分が）複素数値関数の解を求め、必要に応じて、その「実数部分」として、実数値解を求める、という方針が得られる。

以下、A が 2 行 2 列の実行列とする。A の固有値の様子で、大きく次の 3 つの場合に類別される。

- 固有値が実数で、対角化できる場合。
- 固有値が複素数の場合。
- 固有値が実数で対角化できない場合。

ここで、対角化の判定条件を。

2×2 行列が対角化できる $\Longleftrightarrow$ 固有値が 2 つあるかまたは対角行列。

基底と座標、座標変換と対角化について説明。
(i) 固有ベクトルを u, v で表して、

$$Au = \lambda u, Av = \mu v$$

とする。

(ii) 行列 A の固有値が、$\lambda, \overline{\lambda}$ であるとき、固有値 $\lambda = \alpha + i\beta$ の固有ベクトル u を取ってくれば、

$$Au = \lambda u, \quad A\overline{u} = \overline{\lambda}\overline{u}$$

となる。実行列による標準形は、

$$e = \frac{u + \overline{u}}{2}, \quad f = \frac{u - \overline{u}}{2i}$$

と表して $u = e + if$ を使えば、

$$Ae = \alpha e - \beta f, \quad Af = \beta e + \alpha f$$

であるから、（座標変換）行列を

$$Q = (e, f)$$

で定義すれば、

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

となる。この新しい座標を使えば、

$$e^{tA} = Q^{-1}e^{tB}Q,$$

$$e^{tB} = e^{t\alpha}\begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}$$

となって、解曲線は、螺旋状のものであることが分かる。

(iii) 行列 A が対角化できない場合は、固有値 λ は 1 個の実数で、その固有ベクトルを u とすれば、

$$e^{\lambda t}u$$

が一つの解。

ベクトル 1 個だけでは座標変換できないので、とりあえず u 以外の方向のベクトル v をとってきて（これは、固有ベクトルではない！）、

$$P = (u, v)$$

なる座標変換を考えると、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

ただし、$Av = au + bv$。固有値は λ 1 個なので、$b = \lambda$ でなくてはならない。さらに $a \neq 0$ なので（何故か？）、$a^{-1}v$ を改めて v と書いて、$a = 1$ としてよい。以上により、座標変換により行列 A は、

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

に移される。

<u>問</u> 行列

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

は対角化できない。これを示せ。

さて、微分方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

を解くのに、まず、

$$x_2(t) = x_2(0)e^{\lambda t}$$

であり、これを最初の式に代入すると、

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda x_1 + x_2(0)e^{\lambda t}$$

となる。これを解くのに、$x_2(0) = 0$ のときは、簡単で、

$$x_1(t) = x_1(0)e^{\lambda t}.$$

一般の $x_2(0) \neq 0$ の場合の解を捜すために、この特別解の定数部分 $x_1(0)$ を t の関数に置き換えた、

$$x_1(t) = f(t)e^{\lambda t}$$

なるものが解にならないかと考える（定数変化法）(the method of variation of constants)。これを、解くべき方程式に代入すると、

$$\frac{df}{dt} = x_2(0)$$

となるので、解は、

$$f(t) = x_1(0) + x_2(0)t$$

すなわち、

$$x_1(t) = (x_1(0) + x_2(0)t)e^{\lambda t}$$

であることがわかり、

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$$

と書ける。これと、一般的な関係式

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$$

とを比較すると、

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

なる公式が得られた。

これはまた、次のように直接計算することも可能である。A^2, A^3, ... を順次計算していけば、

$$A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

がわかり、したがって、

$$e^{tA} = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!} A^n = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & b \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

ここで、

$$b = \sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n!} n\lambda^{n-1} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \lambda^n t^n \right) = \frac{\partial}{\partial \lambda} e^{\lambda t} = te^{\lambda t}.$$

以上の方程式の分類を幾何学的な意味でまとめると、つぎのようになる。

(i) 行列 A の固有値が正数（負数）で対角化できるとき、解曲線は原点から外側（内側）に放射状に伸びる。

(ii) 行列 A が正負ふたつの固有値をもつとき、解曲線は、双曲線で、二つの固有ベクトルが漸近線を与える。

(iii) 行列 A が複素数の固有値をもつとき、解曲線は原点を中心とした指数螺旋。

(iv) これ以外の場合は、固有値に 0 を含むか、対角化できない場合。

与えられた微分方程式の線型化が最初の 3 つのいずれかの場合は、線型化された方程式の解曲線の様子が、そのままもとの方程式の不動点ちかくでの様子を近似する。

同様の分類は、行列 A のサイズが 3 以上でも（原理的に）可能であるが、格段に難しくなる。

上の計算でも使った定数変化法は、実用的にも役立つものなので、ここでもう少し詳しくみておこう。サイズ n の正方行列 A と、ベクトル値関数

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

を用意して、未知関数

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

に対する微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + f(t)$$

を考える。$f(t) = 0$ のときには、行列 A の指数関数 e^{tA} を使って $x(t) = e^{tA}x(0)$ と解くことができた。そこで、$f \neq 0$ に、

$$x(t) = e^{tA}y(t)$$

なる形の解を捜してみると、

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tA}y(t)\right) = Ae^{tA}y(t) + e^{tA}\frac{dy}{dt}$$

により、

$$\frac{dy}{dt} = e^{-tA} f(t)$$

に帰着するので、これを積分した

$$y(y) = x(0) + \int_0^t e^{-sA} f(s) ds$$

を代入して、

$$x(t) = e^{tA} x(0) + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds$$

なる解の表示を得る。

　具体例として、行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

に対して、

$$f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ b \sin \beta t \end{pmatrix}$$

を考えよう。以前の公式から、

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos \alpha t & \sin \alpha t \\ -\sin \alpha t & \cos \alpha t \end{pmatrix}$$

である。そこで、

$$e^{(t-s)A} f(s) = b \begin{pmatrix} \sin \alpha(t-s) \sin \beta s \\ \cos \alpha(t-s) \sin \beta s \end{pmatrix}$$

の積分が問題になる。三角関数の公式により、

$$\sin \alpha(t-s) \sin \beta s = \frac{1}{2} \cos[\alpha(t-s) - \beta s] - \frac{1}{2} \cos[\alpha(t-s) + \beta s]$$
$$\cos \alpha(t-s) \sin \beta s = \frac{1}{2} \sin[\alpha(t-s) - \beta s] + \frac{1}{2} \sin[\alpha(t-s) + \beta s]$$

であるから、これを s 変数について積分して、

$$\int_0^t e^{(t-s)A} f(s) ds = \frac{b}{\alpha^2 - \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha \sin \beta t - \beta \sin \alpha t \\ \alpha(\cos \beta t - \sin \alpha t) \end{pmatrix}$$

となる $(\alpha \neq \beta)$。これは、$\beta \to \alpha$ のとき、

$$\frac{b}{2}\begin{pmatrix} \frac{\sin \alpha t}{\alpha} - t\cos \alpha t \\ t \sin \alpha t \end{pmatrix}$$

に近づく。最後の式からわかるように、$t \to \infty$ はいくらでも大きくなり発散する。共鳴 (resonance) 現象。

これはまた、複素数値関数 $z(t) = x(t) + iy(t)$ を使って次のようにも解くことができる。

$$\frac{dz}{dt} = -i\alpha z + \frac{b}{2}(e^{i\beta t} - e^{-i\beta t})$$

で

$$z(t) = w(t)e^{-i\alpha t}$$

とおくと、

$$\frac{dw}{dt} = \frac{b}{2}(e^{(\alpha+\beta)t} - e^{(\alpha-\beta)t})$$

となるので、これを解いて

$$w(t) = w(0) + \frac{b}{2i}\left(\frac{e^{i(\alpha+\beta)t} - 1}{\alpha+\beta} - \frac{e^{i(\alpha-\beta)t} - 1}{\alpha-\beta}\right)$$

したがって、

$$z(t) = z(0)e^{-i\alpha t} + \frac{b}{2i}\left(\frac{e^{i\beta t} - e^{-i\alpha t}}{\alpha+\beta} - \frac{e^{-i\beta t} - e^{-i\alpha t}}{\alpha-\beta}\right).$$

二体問題

ニュートンの重力理論によれば、二つの天体の運動は、

$$m\frac{d^2\overrightarrow{x}}{dt^2} = -\frac{\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}}{|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}|^3},$$
$$n\frac{d^2\overrightarrow{y}}{dt^2} = -\frac{\overrightarrow{y} - \overrightarrow{x}}{|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}|^3}$$

なる連立微分方程式で与えられる。

これを解いてみよう。符号に注意して、右辺の重力の項を消去すると、

$$\frac{d^2}{dt^2}(m\overrightarrow{x} + n\overrightarrow{y}) = 0$$

となって、

$$m\overrightarrow{x} + n\overrightarrow{y} = t\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$$

であることがわかる。これは、二体の重心 $m\overrightarrow{x}+n\overrightarrow{y}$ が等速度運動をするということで、この重心からの相対運動を問題にすれば、

$$m\frac{d^2}{dt^2}\left(\overrightarrow{x}-\frac{m\overrightarrow{x}+n\overrightarrow{y}}{m+n}\right)=\frac{mn}{m+n}\frac{d^2}{dt^2}(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y})$$

から、$\overrightarrow{f}=\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y}$, $\mu=mn/(m+n)$ とおくとき、

$$\mu\frac{d^2\overrightarrow{f}}{dt^2}=-\frac{\overrightarrow{f}}{|\overrightarrow{f}|^3}$$

となる。

　ここで、ベクトル積

$$\overrightarrow{f}\times\frac{d\overrightarrow{f}}{dt}$$

を考えると、これは、運動の定数（微分方程式の積分）である。そこで、座標系を f_3-軸がこの方向であるようにとると、運動は、$f_3=0$ なる平面に限定される。そこで、ベクトル値関数 $\overrightarrow{f}(t)$ の代りに、複素数値関数

$$z(t)=f_1(t)+if_2(t)$$

を導入すれば、上の方程式は、

$$\mu\frac{d^2z}{dt^2}=-\frac{z}{|z|^3}$$

という形になる。さらに極座標 $z=re^{i\theta}$ を使えば（$r=r(t)$, $\theta=\theta(t)$ は t の関数）、

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt}&=\frac{dr}{dt}e^{i\theta}+ir\frac{d\theta}{dt}e^{i\theta},\\ \frac{d^2z}{dt^2}&=\frac{d^2r}{dt^2}e^{i\theta}+2i\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}e^{i\theta}+ir\frac{d^2\theta}{dt^2}e^{i\theta}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2e^{i\theta}\end{aligned}$$

であるから、両辺を比較して、

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=-\frac{\mu r^2}{,}$$

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)=2r\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r^2\frac{d^2\theta}{dt^2}=0\ (\text{Kepler の第二法則}).$$

この二つ目の式から、

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=a$$

は運動の定数であり、これを使って、角速度を消すと、

$$\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{a^2}{r^3}+\frac{1}{\mu r^2}=0$$

なる r についての微分方程式が得られる。

これそのものは、簡単な関数では表せないが、$r=r(t)$ と $\theta=\theta(t)$ から、t を消去した、軌道の方程式 $r=\rho(\theta)$ は次の様にして求めることができる。$\rho(\theta)$ に対する方程式は、

ここで、一工夫。r のかわりにその逆数 $s=\rho(\theta)^{-1}$ を考えると、

この等速度運動をしている座標系を導入すれば、$m\overrightarrow{x}+n\overrightarrow{y}=0$ と仮定して一般性を失わない。

この仮定の下で、