微積分 II

山上　滋

平成15年1月10日

目次

1　重積分　1

2　偏微分　4

3　変数変換　9

4　ガンマ関数　18

5　２変数の極値問題　20

6　等高線と陰関数　25

7　条件付極値　28

8　変分法　29

A　二次形式　32

1　重積分

積分の意味を復習。

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

応用例として、立体の体積 V は切り口の面積 $S(t)$ を使って、

$$V = \int_a^b S(t)dt$$

と表すことができる。

例題 1.1. 球の体積。 $-r \le t \le r$, $S(t) = \pi(r^2 - t^2)$ により、

$$\int_{-r}^{r} dt\, \pi(r^2 - t^2) = \pi r^2 [t]_{-r}^{r} - \frac{1}{3}\pi[t^3]_{-r}^{r} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

２変数の関数 $f(x,y) \ge 0$ について, 立体

$$\{(x,y,z); a \le x \le b, c \le y \le d, 0 \le z \le f(x,y)\}$$

の体積を、x 軸に垂直な平面で切って、y 軸に垂直な平面で切って、求めると

$$\int_a^b dx \left(\int_c^d dy\, f(x,y) \right), \quad \int_c^d dy \left(\int_a^b dx\, f(x,y) \right)$$

という２通りの表示が得られ、２つの**繰り返し積分**の値が一致する。一般に、$f(x,y)$ が負の値を取るときにも、$f(x,y) = f_+(x,y) - f_-(x,y)$ と正の値を取る関数の差で表すことにより、

$$\int_a^b dx \left(\int_c^d dy\, f(x,y) \right) = \int_c^d dy \left(\int_a^b dx\, f(x,y) \right)$$

という公式が成り立つ。

繰り返し積分は、３変数以上の場合にも容易に定義できる。結果は積分を実行する順番に無関係であろうか？これは、２つの変数の入れ替えですべての置換が書けることからわかる。

そこで、$f(x_1, \cdots, x_n)$ が $\{(x_1, \cdots, x_n); a_i \le x_i \le b_i\}$ で定義された関数のとき

$$\int dx_1 \cdots dx_n\, f(x_1, \cdots, x_n) = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \cdots \int_{a_n}^{b_n} dx_n\, f(x_1, \cdots, x_n)$$

によって n 変数の積分が定義され、$n+1$ 次元立体

$$\{(x_1, \cdots, x_n, y); a_i \le x_i \le b_n,\ 0 \le y \le f(x_1, \cdots, x_n)\}$$

の体積と解釈できる。

関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ が直方体ではなく一般の n 次元図形 D の上で定義されているときは、D を含む直方体 R をとり、$f(x)$ を D の外では 0 であるように拡張した関数 F を使って、

$$\int_D dx f(x) = \int_R dx F(x)$$

によって、D 上の積分を定義する。

例題 1.2. 平面図形

$$D = \{(x, y); a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

の上で定義された連続関数 $f(x, y)$ に対して、

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

となる。

例題 1.3. 繰り返し積分

$$\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 dy e^{x/y}$$

の値を求める。

Proof.

$$D = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$$

なる平面図形を考えると、

$$\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 dy e^{x/y} = \int_D f(x, y) dx dy.$$

一方、

$$D = \{(x, y); 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x^2 \leq y\}$$

という表示を使えば、

$$\begin{aligned} \int_D f(x, y) dx dy &= \int_0^1 dy \int_0^{y^2} dx e^{x/y} \\ &= \int_0^1 dy [y e^{x/y}]_{x=0}^{x=y^2} \\ &= \int_0^1 dy (y e^y - y) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となって、問題になっている繰り返し積分の値が得られた。 □

例題 1.4. $D = \{(x_1, \cdots, x_n); x_i \geq 0,\ x_1 + \cdots + x_n \leq 1\}$ とするとき、

$$\int_D dx 1 = \frac{1}{n!}.$$

重積分についても広義積分を考えることができ、繰り返し積分の公式が成り立つ。

例題 1.5.

$$\int_R dxdy\, e^{-x^2-y^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-x^2-y^2} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2} \right)^2.$$

左辺は、xy-平面に平行な切り口を考えて、

$$\int_0^1 dz\, S(z) = \int_0^1 dz\, \pi(-\log z) = \pi[z - z\log z]_{z=0}^{z=1} = \pi$$

と計算できるので、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

となる。

例題 1.6.

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) =$$

$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} dt\, t^{x-1} e^{-t}$ で、 $t = s^2$ とおくと

$$\Gamma(x) = 2\int_0^{+\infty} s^{2x-1} e^{-s^2}$$

なる表示が得られるので、

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

2　偏微分

最初に多変数関数の連続性の定義を。ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ における点列（ベクトル列）$\{x(k) = (x_1(k), \dots, x_n(k))\}_{k\geq 1}$ が点（ベクトル）$x = (x_1, \dots, x_n)$ に収束するとは、

$$\lim_{k\to\infty} x_j(k) = x_j, \quad 1 \leq j \leq n$$

となること。これは,

$$\lim_{k\to\infty} \|x(k) - x\| = 0$$

と言ってもよい。ここで

$$\|x\| = \sqrt{(x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2}$$

である。

n 変数の関数 $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ は、収束する点列 $\{x(k)\}$ に対していつでも

$$\lim_{k\to\infty} f(x(k)) = f(x)$$

となるとき、**連続**であるという。ここでも、連続性のイメージは、関数のグラフ（$n = 2$ のときは曲面）がつながっているということ。

以下，2 変数関数について述べるが，n 変数関数でも本質は変わらない。

- 記号 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$, $f_y(a, b)$ の意味。
- 偏導関数と繰り返し微分。$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = f_{yx}(x, y)$.

例題 2.1. 関数 $f(x, y) = \sin(xy + y^2)$ を偏微分してみよう。

$$f_x = y\cos(xy + y^2), f_y = (x + 2y)\cos(xy + y^2),$$

$$f_{xx} = -y^2 \sin(xy + y^2), f_{yy} = 2\cos(xy + y^2) - (x + 2y)^2 \sin(xy + y^2),$$

$$f_{xy} = \cos(xy + y^2) - y(x + 2y)\sin(xy + y^2) = f_{yx}.$$

いろいろな例で計算してみると、いつでも $f_{xy} = f_{yx}$ が成り立っているようにみえる。

定理 2.2. f_{xy}, f_{yx} が存在してともに連続関数になるとき

$$f_{xy} = f_{yx}.$$

Proof. $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ を示す。$R = [a, a+r] \times [b, b+r]$ とする ($r > 0$)。

$$\begin{aligned}\int_R dsdt\, f_{yx}(s,t) &= \int_a^{a+r} ds \int_b^{b+r} dt\, f_{yx}(s,t) \\ &= \int_a^{a+r} ds\, [f_x(s, b+r) - f_x(s,b)] \\ &= f(a+r, b+r) - f(a, b+r) - f(a+r, b) + f(a,b)\end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned}\int_R dsdt\, f_{xy}(s,t) &= \int_b^{b+r} dt \int_a^{a+r} ds\, f_{xy}(s,t) \\ &= \int_b^{b+r} dt\, [f_y(a+r, t) - f_y(a,t)] \\ &= f(a+r, b+r) - f(a, b+r) - f(a+r, b) + f(a,b)\end{aligned}$$

を比較して

$$\int_R dsdt\, f_{xy}(s,t) = \int_R dsdt\, f_{yx}(s,t).$$

両辺を r^2 で割って $\lim_{r\to 0}$ を取ると

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b).$$

□

系 2.3. 関数 $f(x,y)$ は何度でも偏微分できて、繰り返し偏微分して得られるすべての関数が連続であるとすると、偏微分の結果は繰り返す順番によらない。

ベクトル値関数 $p(t) = (x(t), y(t), z(t))$ の微分

$$\frac{dp}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right).$$

は、曲線 $\{p(t); t \in \mathbb{R}\}$ の接ベクトルを表す。

定理 2.4 (Chain Rule). 関数 $f(x,y,z)$ が連続な偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$ をもつとき、１次の近似式

$$f(a+\Delta x, b+\Delta y, c+\Delta z) \fallingdotseq \frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\Delta z$$

および微分の公式

$$\frac{d}{dt}f(p(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(p(t))\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(p(t))\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}(p(t))\frac{dz}{dt}$$

が成り立つ。

Proof. 本質的な違いがないので、２変数の場合を示す。$a = x(t)$, $b = y(t)$ として $x(t+\Delta t) = a + \Delta x$, $y(t+\Delta t) = b + \Delta y$ と書くとき、

$$\begin{aligned} &f(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t)) - f(x(t), y(t)) \\ &\qquad = f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a+\Delta x, b) + f(a+\Delta x, b) - f(a,b) \\ &\qquad = \int_b^{b+\Delta y} dy\, \frac{\partial f}{\partial y}(a+\Delta x, y) + \int_a^{a+\Delta x} dx\, \frac{\partial f}{\partial x}(x,b) \end{aligned}$$

で、両辺を Δt で割って極限 $\lim\limits_{\Delta t \to 0}$ を考える。

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}\frac{1}{\Delta y}\int_b^{b+\Delta y} dy\, \frac{\partial f}{\partial y}(a+\Delta x, y) + \frac{\Delta x}{\Delta t}\frac{1}{\Delta x}\int_a^{a+\Delta x} dx\, \frac{\partial f}{\partial x}(x,b)$$

で、Δx, Δy が小さいとき、積分変数の動く範囲は (a,b) のごく近くに限定され、したがって f_x, f_y の連続性により、

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a+\Delta x, y) \fallingdotseq \frac{\partial f}{\partial y}(a,b), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,b) \fallingdotseq \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$$

という近似式が成り立ち、

$$\lim_{\Delta y \to 0}\frac{1}{\Delta y}\int_b^{b+\Delta y} dy\, \frac{\partial f}{\partial y}(a+\Delta x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

などから、求める公式を得る。 □

問 1. $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$, $x=at$, $y=bt$ のとき、公式が成り立つことを確かめよ。

１次の近似式

上記 Chain Rule はまた、次のように解釈することもできる。１変数の関数 $F(t)$ について、t が小さいとき成り立つ近似式

$$F(t) \fallingdotseq F(0)+F'(0)t$$

を $F(t)=f(x(t),y(t),z(t))$ に使えば、

$$f(a+\Delta x,b+\Delta y,c+\Delta z) \fallingdotseq f(a,b,c)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)\Delta y+\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\Delta z$$

が得られる。

実際、$(x(0),y(0),z(0))=(a,b,c)$, $(x(t)-a,y(t)-b,z(t)-c)=(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$ とおいて t は小さいものとすると、

$$\begin{aligned}
&f(a+\Delta x,b+\Delta y,c+\Delta z)=f(x(t),y(t),z(t))\\
&\qquad \fallingdotseq f(a,b,c)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)\frac{dx}{dt}(0)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)\frac{dy}{dt}(0)+\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\frac{dz}{dt}(0)\right)t
\end{aligned}$$

で、

$$\Delta x=x(t)-a \fallingdotseq x(0)+\frac{dx}{dt}(0)t-a=\frac{dx}{dt}(0)t$$

などから、上で述べた近似式を得る。

これはまた,「無限小量」dx, dy, dz を形式的に導入して

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

とも表記される。

例題 2.5. 半径 r、高さ h の円錐の体積を V で表すとき、r が１％、h が２％増えた場合、V はおおよそ何％増えるか。

接平面

上の公式 (ChainRule) の応用として、曲面 $f(x,y,z)=0$ の点 (a,b,c) における接平面を求めてみよう。曲面に乗っている曲線で点 (a,b,c) を通るも

のを、パラメータ t を使って $(x(t), y(t), z(t))$, $(x(0), y(0), z(0)) = (a, b, c)$ と表すと、

$$f(x(t), y(t), z(t)) = 0$$

が t によらずに成り立つ。この関係式を t について微分して、chain rule を使えば、

$$\frac{dx}{dt}(0)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) + \frac{dy}{dt}(0)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c) + \frac{dz}{dt}(0)\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) = 0$$

が得られる。すなわち、接ベクトル $(\frac{dx}{dt}(0), \frac{dy}{dt}(0), \frac{dz}{dt}(0))$ は、ベクトル

$$(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c), \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c))$$

に直交する。逆に、点 (a, b, c) を通る曲線 $(x(t), y(t), z(t))$ （曲面の上に乗っていなくても）が上の式を満たすならば、

$$\frac{d}{dt}f(x(t), y(t), z(t))|_{t=0} = 0$$

となって、$f(x(t), y(t), z(t))$ の値が $t = 0$ の近くでほとんど変化しない：すなわち、曲線は点 (a, b, c) で曲面に接する。以上により、

定理 2.6. 曲面 $f(x, y, z) = 0$ の上の点 (a, b, c) における接平面の法線ベクトルは、

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c), \frac{\partial f}{\partial y}a,b,c, \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\right)$$

で与えられる。

問 2. 二次曲面 $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$ の接平面の方程式を求めよ。

例題 2.7. 円錐

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

を考えると，原点 $(0, 0, 0)$ で

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (0, 0, 0)$$

となって法線ベクトルが定義できない。このような点は **特異点** とよばれ，接平面を定義することが一般にはできない。

3　変数変換

行列式と平行四辺形の面積

　a, b, c, d の式 $ad-bc$ を

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

と書いて（２次の）**行列式**という。行列式は、次の性質をもつ。

(i) $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a+tc & b+td \\ c & d \end{pmatrix}$,

(ii) $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$.

　一方、２つのベクトル (a,b), (c,d) を２辺とする平行四辺形の面積を $S\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表す。ただし、ベクトル (c,d) がベクトル (a,b) から見て時計回りの位置にあるときは、面積にマイナスの符号をつけたものを S と定義する（符号付き面積）。

　このとき、

$$S\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

が成り立つ。

重積分の意味

　平面内の図形 D の上で定義された関数 $f(x,y)$ に対して

$$\int_D f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} f(x_j,y_j)|D_j|$$

が成り立つ。ここで、$D_1\cup\cdots\cup D_n = D$ は、D の分割を表し、$|D_j|$ は D_j の面積、(x_j,y_j) は D_j 内の点、極限 $\lim\limits_{n\to\infty}$ は、$|D_j|\to 0$ となるようなものであるとする。

　以上を踏まえて、重積分の変数変換について考えたい。変数 x, y を、新たな変数 u, v により、

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$$

と表したとしよう。ここで、２変数の関数 φ, ψ は、微分が連続になっているものとし、変数 (u, v) は、平面内の図形 E 上を動くものとする。さらに、D 内の点 (x, y) を与えたとき、上の関係式をみたす点 (u, v) が E 内に丁度一つだけ存在するものとする。

例題 3.1. $E = \{(r, \theta); r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi\}$, $D = \{(x, y) \neq (0, 0)\}$ および

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

で変数変換を定めることができる。これを**極座標変換**と呼ぶ。

E を座標軸に平行な直線で（細かく）分割したものを $E_1 \cup \cdots \cup E_n = E$ とし、各 E_j の変数変換による像を重積分の意味における D_j とする。

E_j 内の点 (u, v) を図のように取り、対応する D_j 内の点を (x, y) で表す。このとき、E_j 内の他の点は、$(u + s\Delta u, v + t\Delta v)$ $(0 \leq s, t \leq 1)$ と表すことができるので、D_j の点は、

$$(\varphi(u + s\Delta u, v + t\Delta v), \psi(u + s\Delta u, v + t\Delta v)), \quad 0 \leq s, t \leq 1$$

と表される。ここで、Δu, Δv はごく小さい数であるとすれば、１次の近似式

$$\varphi(u + s\Delta u, v + t\Delta v) \fallingdotseq \varphi(u, v) + \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v)s\Delta u + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)t\Delta v$$
$$\psi(u + s\Delta u, v + t\Delta v) \fallingdotseq \psi(u, v) + \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v)s\Delta u + \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v)t\Delta v$$

より、

$$\begin{aligned}&(\varphi(u + s\Delta u, v + t\Delta v), \psi(u + s\Delta u, v + t\Delta v)) \\ &\quad = (\varphi(u, v), \psi(u, v)) + s\Delta u(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v)) + t\Delta v(\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v))\end{aligned}$$

となって、これは (x, y) を頂点とし、ベクトル

$$\Delta u(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v)), \qquad \Delta v(\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v))$$

を２辺とする平行四辺形に他ならない。

したがって、D_j の面積は近似的に

$$\left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{pmatrix}\right| \Delta u \Delta v$$

に等しい。ここで、

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}$$

は、(u, v) の関数になるのでそれを

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$$

と書いて、変数変換の **Jacobian** ということにすれば（心は、$\frac{dxdy}{dudv}$ である）、近似式

$$|D_j| \fallingdotseq \left|\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}(u_j, v_j)\right| |E_j|, \qquad (u_j, v_j) \in E_j$$

が成り立つ。そこで、$(x_j, y_j) = (\varphi(u_j, v_j), \psi(u_j, v_j)) \in D_j$ ととれば、

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j, y_j)|D_j| \fallingdotseq \sum_{j=1}^{n} f(\varphi(u_j, v_j), \psi(u_j, v_j)) \left|\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}(u_j, v_j)\right| |E_j|$$

となって $\lim_{n\to\infty}$ をとるとこの近似式は厳密な等式に移行し、公式

$$\int_D f(x, y)dxdy = \int_E f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \left|\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}(u, v)\right| dudv$$

を得る。

例題 3.2. 極座標、$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ のときには

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r$$

であるので、例えば、

$$\begin{aligned} \int_{x^2+y^2\le a^2} e^{-x^2-y^2}dxdy &= \int_{0\le r\le a, 0\le\theta\le 2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^a e^{-r^2} r dr \\ &= \pi(1 - e^{-a^2}). \end{aligned}$$

例題 3.3. 上の例で、$a = +\infty$ の場合を考えると、

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy\right) = \pi$$

より、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

を得る。

問 3. $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$ のとき,

$$\int_D xydxdy$$

の値を計算する。

微分作用素

偏微分作用素 $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}$, 掛け算作用素 $h(x, y)$、から積（合成）と和を何回か繰り返して得られる作用素を **微分作用素** と呼ぶ。

例題 3.4.

(i) $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

(ii) $x\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial x}$.

(iii) $-\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + V(x, y)$.

微分作用素 D と関数 $h(x, y)$ による掛け算作用素 h に対して、

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) hD = \frac{\partial h}{\partial x}D + h\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) D$$

となる（Leibniz Rule）。

関数 $f(x, y)$ に変数変換 $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ を施して得られる関数を $\widetilde{f}$ という記号で表す、すなわち

$$\widetilde{f}(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$$

とすると、$f(x,y)$ に作用する線型作用素 D から、$\widetilde{f}$ に作用する線型作用素 $\widetilde{D}$ を

$$\widetilde{Df} = \widetilde{D}\widetilde{f}$$

によって作りだすことができ、

$$\widetilde{D_1 + D_2} = \widetilde{D_1} + \widetilde{D_2},$$
$$\widetilde{D_1 D_2} = \widetilde{D_1}\widetilde{D_2}$$

となる。

補題 3.5.

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)} + \frac{\partial y}{\partial u}\widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)},$$
$$\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)} + \frac{\partial y}{\partial v}\widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)}$$

である。これを、チルダを適宜省略して

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial y}$$

などと書くことが多い。

とくに、

$$\widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)} = J^{-1}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\right), \widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)} \quad = J^{-1}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\right)$$

となって、微分作用素 D に対して、$\widetilde{D}$ もまた微分作用素になる。（**微分作用素の変数変換**）

例題 3.6. 2次元極座標変換では、

$$\widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},$$
$$\widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

となるので、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

がわかる（左辺でチルダを省略した）。

問 5 3次元極座標変換

$$\begin{cases} x &= r\sin\theta\cos\varphi, \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi, \\ z &= r\cos\theta \end{cases}$$

に対して微分作用素

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

はどのように変換されるか。

例題 3.7. 微分作用素

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

に対して変数変換

$$u = t + x, \quad v = t - x$$

を施せば、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}$$

となるので、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) f = 0 \iff 4\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\widetilde{f} = 0$$

より、

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial v} = g(v).$$

そこで、$g(v)$ の原始関数を $G(v)$ で表せば、

$$\frac{\partial}{\partial v}(\widetilde{f} - G) = 0$$

となり、$\widetilde{f} - G = F(u)$, すなわち、

$$f(x, y) = \widetilde{f}(u, v) = F(t + x) + G(t - x)$$

という形が得られる（波動方程式の一般解）。

写像の微分

　変数変換
$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$$
の定める写像を $F:(u,v)\mapsto(x,y)$ で表わす。(u,v)-平面内の点 (a,b) の近くでの写像の様子は、１次の近似式

$$\varphi(a+\Delta u, b+\Delta v) \fallingdotseq \varphi(a,b) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v,$$
$$\psi(a+\Delta u, b+\Delta v) \fallingdotseq \psi(a,b) + \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v$$

を使うと、無限小位置ベクトルの間の一次変換

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix}$$

で近似される。ここで、

$$\Delta x = \varphi(a+\Delta u, b+\Delta v) - \varphi(a,b),$$
$$\Delta y = \psi(a+\Delta u, b+\Delta v) - \psi(a,b),$$

とおいた。これを１変数のときの近似式

$$\Delta x = f'(a)\Delta u$$

と比較すれば、写像 F の**微分**を行列

$$F'(a,b) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

（の定める１次変換）であると定義するのが合理的である。

　さらに写像（変数変換）

$$G:(s,t)\mapsto(u,v)$$

を用意して合成写像
$$F\circ G:(s,t)\mapsto(x,y)$$

の微分を計算すると、chain rule から

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix}$$

すなわち、

$$(F \circ G)'(s,t) = F'(G(s,t))G'(s,t)$$

であることがわかる（合成写像の微分の公式）。

これから Jacobian についての公式

$$J_{F\circ G}(s,t) = F_F(G(s,t))J_G(s,t)$$

が得られる。この公式はしばしば

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}$$

と書き表わされる。

$$(u,v) = G(s,t), \qquad (x,y) = F(u,v).$$

とくに G として F の逆変換をとると、

$$(F \circ G)(s,t) = (s,t)$$

となるので、

$$F'(u,v)G'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となって、

$$J_{F^{-1}}(x,y) = \frac{1}{J_F(u,v)}$$

であることがわかる。

例題 3.8.

$$\begin{cases} u &= xy, \\ v &= \frac{y}{x^2} \end{cases}$$

なる逆変換に対して、元の変数変換は、これを x, y について解いて、

$$\begin{cases} x &= u^{1/3}v^{1/3}, \\ y &= u^{2/3}v^{-1/3} \end{cases}$$

と表わされるので、

$$J_F(u,v) = \frac{1}{3}\frac{1}{v}.$$

一方、

$$J_{F^{-1}}(x,y) = \begin{vmatrix} y & x \\ -2yx^{-3} & x^{-2} \end{vmatrix} = 3\frac{y}{x^2}$$

となって、

$$J_F(u,v)J_{F^{-1}}(x,y) = 1$$

が成り立っている。

4 ガンマ関数

階乗を表す積分公式

$$n! = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$$

をみてオイラーは、補完する関数としてガンマ関数

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx, \quad t > 0$$

を考えた。（1 だけずらす理由は、定義域を $t > 0$ としたいためであろうか。）あわせて、ベータ関数

$$B(s,t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1} dx, \quad s > 0, t > 0$$

も定義した。この 2 つの関数の関係について調べてみよう。

まず、ベータ関数の定義式で変数変換、 $y = 1 - x$ を行うと、

$$B(s,t) = B(t,s).$$

つぎに変数変換 $x = \sin\theta$ を施すと、

$$B(s,t) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2s-1}\theta \sin^{2t-1}\theta d\theta.$$

一方ガンマ関数の定義式で変数変換 $x = r^2$ を行うと

$$\Gamma(t) = 2\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{2t-1} dr.$$

これから、$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ がわかる。関係式 $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ を繰り返し使うと、$\Gamma(n/2)$ の値が計算できる。

命題 4.1. 次の公式が成り立つ。

$$B(s,t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}.$$

Proof.

$$\Gamma(s) = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^{2s-1} dx$$
$$\Gamma(t) = 2\int_0^{+\infty} e^{-y^2} x^{2t-1} dy$$

を掛けて

$$\Gamma(s)\Gamma(t) = 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2} x^{2s-1} y^{2t-1} dxdy.$$

ここで極座標変換を施すと、

$$= 4\int_0^{+\infty} dr \int_0^{\pi/2} d\theta e^{-r^2} r^{2(s+t)-1} \cos^{2s-1}\theta \sin^{2t-1}\theta dr d\theta$$
$$= \Gamma(s+t)B(s,t).$$

□

例題 4.2.

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m\theta \sin^n\theta d\theta = \frac{1}{2}B(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma((m+1)/2)\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(1+(m+n)/2)}.$$

ここで、

$$\Gamma(l+1/2) = (l-1/2)(l-3/2)\ldots\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

を使うと m, n の偶奇で場合分けが必要になるが、いつでも値を計算できる。例えば、

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\sin^6\theta d\theta &= \frac{1}{2}\frac{\Gamma(5/2)\Gamma(7/2)}{\Gamma(6)}\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{5!}3/2\cdot 1/2\cdot\sqrt{\pi}5/2\cdot 3/2\cdot 1/2\cdot\sqrt{\pi}\\ &= \frac{3}{2^9}\pi.\end{aligned}$$

問定積分

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n\theta d\theta$$

の公式をガンマ関数を利用して導く。

ガンマ関数の与える増大度については、微積分 I で見たように、

$$\Gamma(t)\sim\sqrt{2\pi t}t^te^{-t}$$

が成り立つ。

5　２変数の極値問題

１変数の場合の復習。まず、関数 $f(x)$ が $x=a$ で極値（extremum）（極大または極小）をもつとき、$f'(a)=0$ でなければならない。そして、このとき、２次の近似式

$$f(x)\fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$$

を使えば、$f''(a)>0$ のとき極小、$f''(a)<0$ のとき極大。$f''(a)=0$ のときには３次以上の近似式を調べることになる。

同様のことを２変数関数 $f(x,y)$ についても行いたい。

まず、$f(x,y)$ が (a,b) で極値をもてば、x の関数 $f(x,b)$, y の関数 $f(a,y)$ それぞれが極値をもつから、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0.$$

このような点 (a,b) を関数 f の**特異点** (singular point) と呼ぶ。

例題 5.1. 関数 $f(x,y)=x^3-3xy+y^3$ の極値を持ちそうな点を求める。

定理 5.2. $h,\ k$ が小さいとき 2 次の近似式

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) &= f(a,b)+f_x(a,b)h+f_y(a,b)k \\ &\qquad + \frac{1}{2}(f_{xx}(a,b)h^2+2f_{xy}(a,b)hk+f_{yy}(a,b)k^2) \end{aligned}$$

が成り立つ。

Proof. $x=p+ht,\ y=q+kt$ とおいて、1 変数関数 $F(t)=f(a+ht,b+kt)$ の微分を Chain Rule を使って計算すると、

$$\begin{aligned} F'(t) &= f_x(a+ht,b+kt)h+f_y(a+ht,b+kt)k \\ F''(t) &= f_{xx}(a+ht,b+kt)+2f_{xy}(a+ht,b+kt)hk+f_{yy}(a+ht,b+kt) \end{aligned}$$

となって、近似式 $F(t)=F(0)+F'(0)t+F''(0)t^2/2$ に代入すると、近似式

$$\begin{aligned} f(a+ht,b+kt) &= f(a,b)+(f_x(a,b)ht+f_y(a,b)kt) \\ &\qquad + \frac{1}{2}(f_{xx}(a,b)h^2t^2+2f_{xy}(a,b)hkt^2+f_{yy}(a,b)k^2t^2) \end{aligned}$$

が得られる。これは、$h,\ k$ が小さくなくても t が小さければ成り立つ。$h,\ k$ が小さいときには、$t=\sqrt{h^2+k^2}$ ($h\to h/\sqrt{h^2+k^2}$ など) と思ってこの近似式を使えば、定理で述べた形の近似式が得られる。(あるいは簡単に、$ht,\ kt$ を改めて $h,\ k$ と書き直したと思ってもよい。) □

系 5.3. $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ となる点では、

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} H_f(a,b) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

と書ける。ここで、ヘッセ行列 *(Hessian)* $H_f(a,b)$ を

$$H_f(a,b)=\begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix}$$

によって定義する。

例題 5.4. 関数 $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ が $(0,0)$ で極値を持つかどうかについて調べる。

Proof. $y \neq 0$ のとき、

$$f(x,y) = y^2(a(x/y)^2 + 2b(x/y) + c)$$

と書けるので、2 次式 $at^2 + 2bt + c$ の符号の様子が問題。小さい x, y を考えても、比 $t = x/y$ は全ての実数が出てくることに注意。この 2 次式の符号が定まらないとき、すなわち判別式 $b^2 - ac > 0$ のときは、もとの関数 $f(x,y)$ の符号は、$(0,0)$ の近くで一定でなくなるので、極値ではない。一方、判別式 $b^2 - ac < 0$ の時には、符号はつねに一定で、従って $a > 0, a < 0$ に応じて、関数 $f(x,y)$ は原点で極小、極大になる。

最後に、判別式 $b^2 - ac = 0$ の時には、$at^2 + 2bt + c = a(t - \lambda)^2$ と書けるので、

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = a(x - \lambda y)^2$$

となって、放物線を平行移動して得られる曲面になっている。

もっと詳しく調べるために、極座標

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

を使うと

$$f(x,y) = r^2(a\cos^2\theta + 2b\cos\theta\sin\theta + c\sin^2\theta).$$

そこで、

$$\begin{aligned} g(\theta) &= a\cos^2\theta + 2b\cos\theta\sin\theta + c\sin^2\theta \\ &= \frac{a+c}{2} + \frac{a-c}{2}\cos 2\theta + b\sin 2\theta \\ &= \frac{a+c}{2} + \sqrt{(a-c)^2/4 + b^2}\sin(2\theta + \alpha) \end{aligned}$$

を書き直すと、$g(\theta)$ の最大値・最小値は

$$\frac{a+c}{2} + \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b^2}, \quad \frac{a+c}{2} - \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b^2}.$$

さらに、これらの方向を与える角をそれぞれ φ, ψ とおけば φ と ψ の差は $\pi/2$ となって直交する。 □

定理 5.5. 関数 $f(x,y)$ の特異点 (a,b) において、

(i) $\det(H_f(a,b)) > 0$ ならば、$f_{xx}(a,b)$ の正負に応じて、極小または極大になる。

(ii) $\det(H_f(a,b)) < 0$ ならば、極値にならない（鞍点)。

(iii) $\det(H_f(a,b)) = 0$ のときは、色々な場合がある。

例題 5.6. 上の例で、点 $(0,0)$ の附近での様子を図解 (模型)。

例題 5.7. (iii) の場合に、実際、いろいろなことが起こること。$f(x,y) \fallingdotseq (x-y)^2$ となるときは、$u = x-y$, $v = x+y$ なる変数を使うと、

$$f(x,y) = u^2 + \text{ 3 次以上の項}$$

となって、

$$f(x,y) = u^2 + v^2 u, \qquad f(x,y) = u^2 + v^3$$

等、いろいろな場合が出てくる。

問 4. $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ の極値について調べる。

先の例題で、ヘッセ行列

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

の固有値を λ, μ とし、

$$H = T \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} T^{-1}$$

を直交行列 T による対角化とする。

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$H \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \qquad H \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

である。変数変換

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を使えば、

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda u^2 + \mu v^2$$

となって、$\lambda > 0,\, \mu > 0$ のとき極小、$\lambda < 0,\, \mu < 0$ のとき極大、$\lambda\mu < 0$ のとき極値を持たないであることがわかる。

このことを踏まえると、3 変数 (以上) の場合に、極値の判定条件を拡張することができる。

３変数（以上）の場合も２次の近似式は、同じように計算して特異点のまわりで、

$$f(a+x, b+y, c+z) \fallingdotseq f(a,b,c) + \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} H_f(a,b,c) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$H_f(a,b,c) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a,b,c) & f_{xy}(a,b,c) & f_{xz}(a,b,c) \\ f_{yx}(a,b,c) & f_{yy}(a,b,c) & f_{yz}(a,b,c) \\ f_{zx}(a,b,c) & f_{zy}(a,b,c) & f_{zz}(a,b,c) \end{pmatrix}.$$

偏微分の結果が微分する順序によらないことから、Hessian $H_f(a,b,c)$ は対称行列であること、したがってその固有値は全て実数であることに注意。

定理 5.8. 関数 $f(x,y,z)$ の特異点 (a,b,c) において、

(i) ヘッセ行列 $H_f(a,b,c)$ の固有値が全て正ならば、$f(x,y,z)$ は (a,b,c) で極小。

(ii) ヘッセ行列 $H_f(a,b,c)$ の固有値が全て負ならば、$f(x,y,z)$ は (a,b,c) で極大。

(iii) ヘッセ行列 $H_f(a,b,c)$ が 正の固有値も負の固有値も両方もつときは、極値にならない。

(iv) 上記以外の場合、すなわちヘッセ行列 $H_f(a,b,c)$ が半定値で 0 を固有値に持つときは、いろいろな場合がある。

例題 5.9. 3変数の関数

$$f(x, y, z) = (x + y + z)e^{-x^2-y^2-z^2}$$

の極大・極小について調べる。

Proof.

$$f_x = (1 - 2x(x + y + z))e^{-x^2-y^2-z^2}$$

であるから、$f_x = f_y = f_z = 0$ となるのは、$x = y = z$ のときで、$1 - 6x^2 = 0$、すなわち、$x = \pm 1/\sqrt{6}$. このとき、

$$\begin{aligned} f_{xx} &= -2(2x + y + z)e^{-x^2-y^2-z^2} - 2xf_x, \\ f_{xy} &= -2xe^{-x^2-y^2-z^2} - 2yf_x \end{aligned}$$

であるから、

$$H_f = -2xe^{-x^2-y^2-z^2}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

となる。

$$\begin{vmatrix} t-4 & -1 & -1 \\ -1 & t-4 & -1 \\ -1 & -1 & t-4 \end{vmatrix} = (t-3)^2(t-6)$$

であるから、$(x, y, z) = (1, 1, 1)/\sqrt{6}$ のときは、極大、$(x, y, z) = (-1, -1, -1)/\sqrt{6}$ のときは、極小。

無限遠点で、 $f \to 0$ であるから、実は、これらはそれぞれ、最大値、最小値になっている。 □

Remark . 3変数以上の場合に、固有値を求めて上の判定条件を適用するのは、特殊な場合を除いて現実的な方法ではない。（固有方程式を解くのが一般的には難しい。）

必要な情報は、固有値の値そのものではなくてその符号なので、二次形式の正則行列による標準形の存在を示す際に用いたアルゴリズム（付録参照）を利用すべきである。

6　等高線と陰関数

　2 変数関数 $f(x, y)$ に対して、方程式

$$f(x, y) = c \qquad (c \text{ は定数})$$

で定められた曲線を考える。これは、曲面 $z = f(x, y)$ の平面 $z = c$ による切り口の**等高線** (contour) を表している。

例題 6.1. 関数 $f(x, y) = y^2/2 - \cos x$ の等高線の様子を調べてみよう。(振り子の運動方程式 $\frac{d^2x}{dt^2} = -\sin x$ のポテンシャルエネルギーが $-\cos x$ である。)

Proof. 等高線の方程式

$$\frac{1}{2}y^2 - \cos x = c$$

を y について解くと、

$$y = \pm\sqrt{2(c + \cos x)}.$$

c の大きさで場合を分ける。

(i) $c < -1$ ならば、解は存在しない（$f(x, y) \geq -1$）。

(ii) $c = -1$ となるのは、$\cos x = 1$ のときで、そのとき $y = 0$ であるから、

$$(x, y) = (2\pi n, 0) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

(iii) $-1 < c < 1$ ならば、$c = \cos\gamma$ $(0 < \gamma < \pi)$ と表すことができて、$c + \cos x \geq 0$ となる x の範囲は、$[-\gamma, \gamma]$ およびこれを $2\pi n$ だけ平行移動したもの。このときの曲線の様子を描いてみると、下図のようになる。(y^2 と y のグラフを対比させて。)

(iv) $c = 1$ のときは、$1 + \cos x = 2\cos^2(x/2)$ となるので、

$$y = \pm 2\cos\frac{x}{2}.$$

(v) $c > 1$ のときは、$c + \cos x \geq c - 1 > 0$ となるので、x の範囲には制限がつかず、曲線は、下図のようになる。

□

ここで、$f(x,y)$ の特異点を調べてみると、

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (\sin x, y) = (0,0) \Longleftrightarrow (x,y) = (\pi n, 0), \quad n = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$$

で、各特異点でのヘッセ行列は、

$$H_f(\pi n, 0) = \begin{pmatrix} \cos \pi n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となって、$(\pi n, 0)$ は、(i) n が偶数の時、極小点 (実は最小点)、(ii) n が奇数のとき、鞍点、であることがわかる。

定義 6.2. 曲線 $f(x,y) = c$ 上の点 (a,b) で

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$$

となるものを**特異点**、そうならないものを**正則点**と呼ぶ。

定理 6.3.

(i) 通常点 (a,b) の付近で $f(x,y) = c$ は、１本のなめらかな曲線を表す。

(ii) 特異点 (a,b) において、$\det(H_f(a,b)) > 0$ ならば、(a,b) の付近で方程式 $f(x,y) = c$ をみたす点は他にはない (孤立点)、$\det(H_f(a,b)) < 0$ ならば、方程式 $f(x,y) = c$ は、点 (a,b) で交差する２本のなめらかな曲線を局所的に表す。

Proof. (i) １次の近似式

$$f(x,y) = c + f_x(a,b)(x-a) + f_y(y-b)$$

より、通常点の近くで $f(x,y) = c$ は近似的に直線

$$f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) = 0$$

を表す。

(ii) $\det(H_f(a,b)) > 0$ のときは、点 (a,b) で極値をとるから、$f(x,y) = c = f(a,b)$ となる (x,y) は、(a,b) しかない。

$\det(H_f(a,b)) < 0$ のときは、$z = f(x,y)$ の曲面は、(a,b) で鞍点になっているので、等高線は２本の曲線の交わりになっている。 □

系 6.4. *(i)* でとくに $f_y(a,b)\neq 0$ ならば、等高線を表す方程式 $f(x,y)=c$ を y についてなめらかに解くことができる。すなわち、微分できる関数 $y=\varphi(x)$ で、

$$f(x,\varphi(x))=c, \qquad b=\varphi(a)$$

となるものが、$x=a$ の近くで一つだけ存在する。

これを方程式 $f(x,y)=c$ の定める**陰関数** *(implicit function)* と呼ぶ。

同様に、$f_x(a,b)\neq 0$ ならば、

$$x=\psi(y), a=\psi(b)$$

となるなめらかな関数 ψ が存在する。

例題 6.5. 曲線 $x^3-6xy+y^3=0$ の特異点を求め、その付近での様子を調べよ。

正則点における考察は、３変数以上でもそのまま、成り立つ。例えば、３変数の関数 $\varphi(x,y,z)$ に対して、

$$(\varphi_x(a,b,c),\varphi_y(a,b,c),\varphi_z(a,b,c))\neq(0,0,0)$$

となる点を**正則点**と言うことにすれば、正則点 (a,b,c) の近くで、方程式

$$\varphi(x,y,z)=\varphi(a,b,c)$$

は滑らかな曲面を表し、もし $\varphi_x(a,b,c)\neq 0$ ならば、(b,c) の近くで定義されたなめらかな関数 $\psi(y,z)$ で、

$$\varphi(\psi(y,z),y,z)=\varphi(a,b,c), \qquad \psi(b,c)=a$$

となるものが、一つだけ存在する。

7 条件付極値

拘束条件 $\varphi(x,y,z)=0$ のもとで，関数 $f(x,y,z)$ の極値問題を考える。これは，関数 f を曲面 $S=\{\varphi(x,y,z)=0\}$ に制限したときの極値問題と

いってもよい。S 上の正則点 (a,b,c) で f は極値をとるとしよう。(a,b,c) を通る曲面 S 上の曲線 $(x(t),y(t),z(t))$ を考えると，

$$f_x(a,b,c)\frac{dx}{dt}+f_y(a,b,c)\frac{dy}{dt}+f_z(a,b,c)\frac{dz}{dt}=0.$$

これから，ベクトル $(f_x(a,b,c),f_y(a,b,c),f_z(a,b,c))$ は，S の (a,b,c) における全ての接ベクトルに直交する。したがって，このベクトルは曲面の法線ベクトル $(\varphi_x(a,b,c),\varphi_y(a,b,c),\varphi_z(a,b,c))$ に比例する。すなわち，

$$(f_x(a,b,c),f_y(a,b,c),f_z(a,b,c))=\lambda(\varphi_x(a,b,c),\varphi_y(a,b,c),\varphi_z(a,b,c))$$

となる実数 λ が存在する。これと，拘束条件

$$\varphi(a,b,c)=0$$

を連立させることで，a, b, c および λ を求める方法が Lagrange の未定乗数法と呼ばれるものである。

例題 7.1. コンパクト集合

$$\{(x_1,\ldots,x_n);x_j\geq 0,\sum_j x_j=1\}$$

の上で定義された連続関数

$$H(x)=-\sum_j x_j\log x_j$$

が最大になるのはどのようなときか?

問 5. 集合

$$\{(x_1,\ldots,x_n);x_j>0,\sum_j x_j=1\}$$

の上で定義された連続関数

$$f(x)=\sum_j\frac{1}{x_j}$$

の最小値について調べよ。

固有値が正の $n\times n$ エルミート行列 A が $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(A^{-1})$ となるならば、この値は n 以上であることを示せ。また、等号が成り立つのはどんな場合か。

8　変分法

高さの異なる 2 点を指定したとき、その 2 点をむすぶ滑り台を作ろう。いま、摩擦を無視して重力だけで滑り台を移動するものとして、その移動に要する時間が最小になるような滑り台の形を問う問題について考える。

座標の符号を簡単にするために重力は下から上に働いているものとし、考える 2 点の座標は $(0, h)$, $(a, 0)$ であるとする。

関数 $y = f(x)$, $h = f(0)$, $f(a) = 0$ で与えられるスロープに対して、高さ y の点での速さ v はエネルギー保存則から

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy$$

を満たす。一方

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \frac{dx}{dt}\sqrt{1 + f'(x)^2}$$

でもあるので、

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2gy}{1 + f'(x)^2}}$$

となり、これを書き直してから積分すると、滑り台の所要時間は、

$$T = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + f'(x)^2}{2gf(x)}}dx$$

となる。右辺の積分は、関数 $f(x)$ だけで決まるので、それを $T[f]$ と書くことにすれば、 $T[f]$ は、いわば、「関数の関数」（汎関数、functional、という）であり、問題は、関数 $f(x)$ を変化させたときの、$T[f]$ の最小値を与える f は何かということになる。

このような「関数の関数」に対する極値問題を変分問題といい、「関数の関数」に対する微分法を **変分法** (calculus of variations) と呼ぶ。

上の場合、変化させる関数は、

$$f(0) = h, \quad f(a) = 0$$

となる範囲で考えている。

このような形の、変化させる関数に対する条件を境界条件とよぶ。

一般に、与えられた3変数の関数 $F(x,y,y')$ と2点 (x_j,y_j) $(j=1,2)$ に対して、汎関数

$$F[f]=\int_{x_1}^{x_2}F(x,f(x),f'(x))dx$$

の境界条件

$$f(x_j)=y_j$$

の下での変分問題の解は、次のように考えて求めることができる。

仮に、関数 $f(x)$ が最小値を与えるものだったとして、勝手な関数 g と小さい実数 s に対して

$$f(x)+sg(x)$$

なる関数 $f+sg$、但し境界条件を満たすために $g(x_j)=0$ を仮定しておく、での汎関数の値 $F[f+sg]$ を考える。$F[f+sg]$ を s の関数とみると、$s=0$ で最小値を与えるから

$$\frac{d}{ds}F[f+sg]|_{s=0}=0$$

でなければならない。

一方、

$$\frac{d}{ds}F[f+sg]=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,f+sg,f'+sg')g(x)+\frac{\partial F}{\partial y'}(x,f+sg,f'+sg')g'(x)\right)dx$$

より、

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x),f'(x))g(x)+\frac{\partial F}{\partial y'}(x,f(x),f'(x))g'(x)\right)dx=0$$

となる。ここで、

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}(x,f(x),f'(x))g(x)\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}(x,f(x),f'(x))\right)g(x)+\frac{\partial F}{\partial y'}(x,f(x),f'(x))g'(x)$$

を積分して得られる

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}(x,f(x),f'(x))\right)g(x)dx+\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y'}(x,f(x),f'(x))g'(x)dx=\left[\frac{\partial F}{\partial y'}g(x)\right]_{x_1}^{x_2}=0$$

（g の境界条件に注意）を使うと

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)g(x)dx=0$$

となる。関数 $g(x)$ は、自由に選べるので、これから $f(x)$ に対する微分方程式 (Euler-Lagrange's equation)

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x), f'(x)) = \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}(x, f(x), f'(x)).$$

が得られる。あとはこれを解くことになるのだが、$F(x, y, y')$ が (y, y') だけの関数の時には、

$$f'(x)\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right) = \frac{d}{dx}\left(F - f'(x)\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$$

となるので、$f'(x) \neq 0$ である所では、

$$F(f(x), f'(x)) - f'(x)\frac{\partial F}{\partial y'}(f(x), f'(x)) = \mathrm{const.}$$

という方程式と同値になる。

滑り台の問題の場合だと、

$$F(f(x), f'(x)) - f'(x)\frac{\partial F}{\partial y'}(f(x), f'(x)) = \frac{1}{\sqrt{y(1 + {y'}^2)}}$$

であるから

$$y(1 + {y'}^2) = 2r$$

という方程式と同値で、これを y' について解くと、

$$y' = \pm\sqrt{\frac{2r}{y} - 1}.$$

これは変数分離型であるから、

$$\pm\frac{y}{\sqrt{r^2 - (r - y)^2}}dy = dx$$

の形に書き直して積分すると、

$$x = r\theta - r\sin\theta$$
$$y = r - r\cos\theta$$

なるパラメータ表示が得られる。これは、いわゆる、cycloid なる曲線を表している。

A　二次形式

実変数 $x_1, \dots, x_n$ の二次同次式

$$Q(x) = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$$

を $x_1, \dots, x_n$ の**実二次形式** (real quadratic form) という。二次形式 $Q(x)$ は、対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

を使って、

$$Q(x) = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と表示されるので、これを $Q_A(x)$ と書くことにする。正則行列 $T = (t_{ij})$ を使って、変数 $x_1, \dots, x_n$ に

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

という変数変換を施せば、$Q_A(x) = Q_B(y)$, $B = {}^tTAT$ となる。

定理 A.1 (Lagrange-Sylvester). 任意の実対称行列 A に対して、正則行列 T で、${}^tTAT$ が対角行列になるものが存在する。

　また、このようにして得られた対角行列の対角成分に現れる、正数の個数、負数の個数、零の個数は、それぞれ、A の正固有値の個数、負固有値の個数、零固有値の個数に一致する。但し、固有値の個数は重複度も込めて数える。

Proof. 行列 A のサイズに関する帰納法による。対称行列 A の対角成分に零でないものが現れる、例えば、$a_{11} \neq 0$、とすると、

$$\begin{aligned} Q(x) &= a_{11} x_1^2 + 2x_{11}(b_2 x_2 + \dots + b_n x_n) + R(x_2, \dots, x_n) \\ &= \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n)^2 + R(x_2, \dots, x_n) - \frac{1}{a_{11}}(b_2 x_2 + \dots + b_n x_n)^2 \end{aligned}$$

となって、変数変換

$$y_1 = a_{11}x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n, \quad y_j = x_j \ (2 \le j \le n)$$

を施せば、

$$Q(x) = \frac{y_1^2}{a_{11}} + R(y_2, \dots, y_n) - \frac{1}{a_{11}}(b_2y_2 + \cdots + b_ny_n)^2$$

となって、帰納法が機能する。

全ての対角成分が消えていてなおかつ $A \neq 0$ であるときには、$a_{ij} \neq 0$ となる $i \neq j$ が存在する、例えば $a_{12} \neq 0$ である、ときには、

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なる変数変換を施せば、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

となるので、対角成分に零でないものが含まれる場合に帰着する。

次に、「符号数」が変化しないことを見るために、正則行列 T, T' に対して、

$$^tTDT = A = {}^tT'D'T', \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}, D' = \begin{pmatrix} d_1' & & \\ & \ddots & \\ & & d_n' \end{pmatrix},$$

$d_1 > 0, \dots, d_l > 0$, $d_{l+1} < 0, \dots, d_{l+m} < 0$, $d_{l+m+1} = \cdots = d_n = 0$ などであったとする。ここで、$l < l'$ と仮定して矛盾を導こう。連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ & \vdots & \\ t_{l1} & \dots & t_{ln} \\ t'_{l'+1,1} & \dots & t'_{l'+1,n} \\ & \vdots & \\ t'_{n1} & \dots & t'_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

を考える。$l+(n-l')<n$ であるから、自明でない解 x が存在する。$y=Tx, y'=T'x$ とおく。

一方、作り方から $Q(x)={}^t yDy\leq 0$ かつ $Q(x)={}^t y'D'y'\geq 0$ で、

$$y'=\begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_{l'} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから

$$Q(x)=d'_1(y'_1)^2+\cdots+d'_{l'}(y'_{l'})^2=0$$

となって、$y'_1=\cdots=y'_{l'}=0$ となる。すなわち、$T'x=y'=0$ となって、これは $x\neq 0$ に反する。

以上により、$l=l'$ であることがわかる。同様にして、$m=m'$ も導かれる。 $\square$