CA 2003.7.18

問題 1 は解答用紙の表に、問題 2 は裏に解答すること。

1

(i) (広義) 積分

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

の値を求めよ。

(ii) 自然数 n に対して、x の関数 $\dfrac{x}{(x^2+1)^n}$ の微分を計算し、

$$\frac{A}{(x^2+1)^n} + \frac{B}{(x^2+1)^{n+1}}$$

の形に書き表せ。ここで、A, B は定数である。

(iii)

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と置くとき、比 I_{n+1}/I_n を n の式で表し、I_2, I_3 の値を具体的に求めよ。

2

(i) (広義) 積分 $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ の値が有限であることを示せ。

(ii) 正数 $t > 0$ に対して関数 $f(t)$ を

$$f(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\,dx$$

で定めるとき、変数変換 (置換積分) により関数 $f(t)$ の形を具体的に求め、そのグラフの概形を描け。

(iii) (広義) 積分 $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ の値が有限であるかどうか調べよ。