CA 2003.6.27

問題 1 は解答用紙の表に、問題 2 は裏に解答すること。

1

(i) テーラーの公式 (積分形)

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \int_0^x f''(t)(x-t)\,dt$$

を $f(x) = (1+x)^{1/3}$ に対して具体的に書き下し、さらに不等式

$$-\frac{1}{9}x^2 \le \int_0^x f''(t)(x-t)\,dt \le 0, \qquad 0 \le x \le 1$$

を示せ。

(ii) 1003 の立方根 $\sqrt[3]{1003}$ の小数点以下 5 桁目を四捨五入した値 (小数点以下 4 桁の数) を求めよ。

2

(i) 正弦関数 $\sin x$ の ($x = 0$ のまわりでの) テーラー展開式を書き下し (証明不要)、それを使って、$(\sin x)^2$ のテーラー展開を x の 4 次の項まで, $(\sin x)^3$ のテーラー展開を x の 5 次の項まで具体的に求めよ。

(ii) 極限

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^3 - ax - bx^3}{x^5}$$

が存在するように定数 a, b を定め、その極限値を求めよ。

(iii) 極限

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x) - \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3}{x^4}$$

が存在するように定数 α, β, γ を定め、その極限値を求めよ。