微積分 I

山上　滋

平成 15 年 1 月 10 日

目 次

1　微分の公式

関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分できるとは、極限

$$A = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が存在すること。A を**微分係数** (differential coefficient) という。微分係数は、f と a だけで決まるので、$f'(a)$ と書き表し方もする。また、関数

を $y=f(x)$ と書き表す慣例に従って、$\Delta y = f(a+h)-f(a)$, $\Delta x = h$ という表記の極限として、$\dfrac{dy}{dx}$ という書き方も一般的である。

さらに、a を変化させると $f'(a)$ は a の関数と思えるので、これを、f の**導関数** (derivative) と呼ぶ。

また、以上の手続きを総称して**微分** (differentiation) と呼ぶことにする。

微分（係数）の幾何学的な意味は、接線の傾き。

一方物理的な意味としては、変数を時間のパラメータとして、速度 (velocity) ということになる。とくに、3次元空間における質点の運動が、

$$p(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

というベクトル値関数で表されているとき、その速度（ベクトル）は、

$$\frac{dp}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

によって与えられる。

微分は、関数の局所的な性質を調べる上でとくに重要である。微分係数が接線の傾きを表しているという幾何学的意味から、

$$\begin{cases} f'(a) > 0 \text{ ならば} \quad f \text{ は } x=a \text{ で増加の状態} \\ f'(a) = 0 \text{ ならば} \quad f \text{ は、} x=a \text{ で瞬間的に変化を止めている状態} \\ f'(a) < 0 \text{ ならば} \quad f \text{ は } x=a \text{ で減少の状態} \end{cases}$$

であることがわかるので、$f'(a)=0$ のとき、$f'(x)$ の符号が、$x=a$ の前後で正から負へ（負から正へ）変化すれば、f のグラフは、$x=a$ でピーク（谷底）になっていることが分かる。

問 1. 定義に従って

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

を導いてみる。

上の微分の定義は次のように言い換えることができる。

$$o(h) = f(a+h) - f(a) - Ah$$

とおくと、$f(x) = f(a) + A(x-a) + o(x-a)$ であり、関数 $o(h)$ は、$h \to 0$ としたときに、h よりも早く 0 に近づく。すなわち、

$$\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$$

をみたす。逆に、$o(h)$ がこの性質を持ては、$f(x)$ は、 $x=a$ で微分できて $A=f'(a)$ となる。

これから、微分係数とは、関数を１次式で近似したときの係数に他ならないことがわかる。これは、便利な言い換えで、例えば、$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+o_1(h)$, $g(a+h)=g(a)+g'(a)h+o_2(h)$ と書き表せるとき、

$$\begin{aligned}f(a+h)g(a+h) &= (f(a)+f'(a)h+o_1(h))(g(a)+g'(a)h+o_2(h)) \\ &= f(a)g(a)+(f'(a)g(a)+f(a)g'(a))h+f'(a)g'(a)h^2 \\ &\quad +(f(a)+f'(a)h)o_2(h)+(g(a)+g'(a)h)o_1(h)+o_1(h)o_2(h)\end{aligned}$$

で、最初の３項以外は、h よりも 0 に近づくスピードが早いので、まとめて $o_3(h)$ と書いてしまうと、

$$f(a+h)g(a+h)=f(a)g(a)+(f'(a)g(a)+f(a)g'(a))h+o_3(h),$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{o_3(h)}{h}=0$$

が成り立つので、

$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

という公式が得られた。同じような考え方で、

定理 1.1 (微分の基本公式).

(i)

$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

(ii)

$$\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x).$$

(iii)

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=-\frac{f'(x)}{f(x)^2}.$$

ここで、基本的な関数の微分の公式を復習しておこう。まず、定義から即座にわかるものとして

$$1'=0, \qquad x'=1, \qquad (x^{-1})'=-x^{-2}.$$

次に、指数関数 a^x の微分は、

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

より、 Aa^x の形である。ここで、A は指数関数 $y=a^x$ の $x=0$ における接線の傾きを表しているから、a が 1 に近づけば $A\to 0$ となり、また a が大きくなれば、$A\to +\infty$ となる。そこで、ちょうど $A=1$ となるような $a>1$ が存在するはずで、それを普通 e と書いて **Napier の数**と呼んでいる。したがって、$(e^x)'=e^x$ であり、また e を底とする対数関数 $\log x$ は、e^x の逆関数であることから（接線の傾きの関係を考えて、詳しくは３節)、$(\log x)'=1/x\ (x>0)$ となる。

例題 1.2.

(i) 正数 $a>0$ に対して、指数関数 $y=a^x$ の微分は、$a^x=e^{x\log a}$ と書きなおして（$a=e^{\log a}$ を使う)、

$$\frac{d}{dx}a^x=e^{x\log a}\log a=a^x\log a$$

となる。

(ii) 同じく正数 $a>0$ に対して x の冪関数 $x^a\ (x>0)$ の微分は、$x^a=e^{a\log x}$ と書きなおして、

$$\frac{d}{dx}x^a=x^{a-1}$$

となる。

問 2. 正数 $a>0$ を変化させるとき、指数関数 $y=a^x$ のグラフがどのように変わるか確認する。冪関数 $y=x^a$ のグラフについてはどうか。

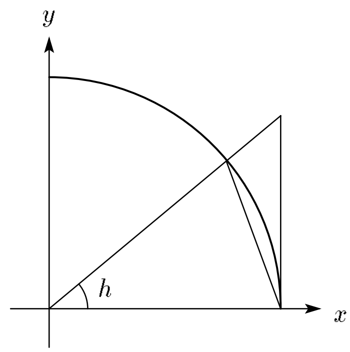
問 3. $x<0$ のとき、

$$(\log(-x))'=\frac{1}{x}$$

であることを確認。

さらに、べき関数 $y=x^\alpha$ については、両辺の対数を取って、$\log y=\alpha\log x$ を x について微分すると、

$$\frac{y'}{y}=\frac{\alpha}{x}$$



より、$y' = \alpha x^{\alpha-1}$ となる。以上により、

$$(e^x)' = e^x, \qquad (\log|x|)' = \frac{1}{x}\ (x \neq 0), \qquad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}\ (x > 0).$$

例題 1.3. 合成関数の微分が二重に入った問題。

$$\left(\log\left|x + \sqrt{x^2+a}\right|\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}.$$

問 4. 上の問題で、x の範囲（関数の定義域）を吟味する。

次に、三角関数の微分。

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\cos h - 1}{h}\sin x + \frac{\sin h}{h}\cos x$$

であるから、

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h}, \qquad \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$$

が問題。

最初の極限は、関数 $\cos x$ の $x = 0$ における接線の傾きになっており、$y = \cos x$ は、$x = 0$ で直線 $y = 1$ に接するから、0 となる。2 つめの極限は、角度を測る単位として、半径 1 の円の弧の長さを使えば、1 となる。(面積の比較から、$\sin x \leq x \leq \tan x$ を導く。)

以上により、$(\sin x)' = \cos x$ がわかり、同様にして $(\cos x)' = -\sin x$ となるので、

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x, \qquad (\tan x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}.$$

問 5. $\tan x$ の微分の公式を確認。

問 6. 具体的な関数の微分の公式の中で基本的なものは何か。また派生的なものは何か。

2　関数の増大度

基本的な3つの関数

$$\log x, \quad x^n, \quad e^x.$$

の**増大のスピード** (the rapidity of increase) を比較してみる。

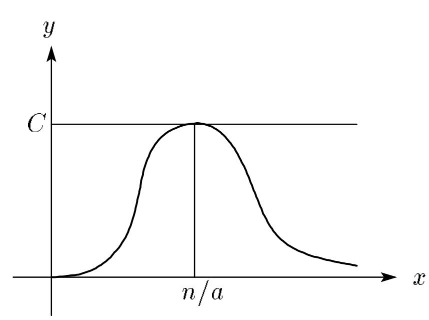
まずは、x^n と e^x の比較。もう少し一般に、x^n と e^{ax} $(a > 0)$ の比較。このためには、関数

$$f(x) = x^n e^{-ax} \qquad , x \geq 0$$

を考えるとよい。$f(x)$ のグラフは、$f'(x) = x^{n-1}e^{-ax}(n - ax)$ に注意して増減表を書いてみると、

x	0		n/a	
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$

となり、$x = n/a$ で最大値をとることがわかる。



これだけからでは $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ かどうか判断できないが、定数 $C > 0$ で、$|f(x)| \leq C$ をみたすものがあることは分かる。（このような $C > 0$ があるとき、関数 $f(x)$ は有界であるといった言い方をする。）さて、x^n と e^x の比較にもどって、$x^n e^{-x}$ を $x^n e^{-x/2} e^{-x/2}$ とわけてみよう。

すると $a = 1/2$ の場合の結果により、$|x^n e^{-x/2}| \leq C$ となる定数 $C > 0$ があるので、

$$|x^n e^{-x}| \leq Ce^{-x/2}$$

という不等式が得られる。$\lim_{x\to+\infty} e^{-x/2} = 0$ は知っているので、これから

$$\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$$

が出てくる。

$\log x$ と x^n との比較は変数変換 $t = \log x$ により、

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^n} = \lim_{t\to+\infty} te^{-nt} = 0$$

となる。($x \to +\infty$ のとき、$t \to +\infty$ であることに注意。)

以上の結果を

$$\log x << x^n << e^x \qquad (x \to +\infty)$$

と書くことにしよう。

問 7. 任意の $a > 0, n > 0$ に対して、$x^n << e^{ax}$ $(x \to +\infty)$ を確かめよ。

Remark . $x^n << e^{ax}$ は、x が大きいところでの様子を表しているのであって、不等式 $x^n < e^{ax}$ が x の大きくないところで成り立つといっているのではない。実際、$n = 4, a = 1$ のとき $x = 2$ ととれば、

$$2^n = 16 > 3^2 > e^2.$$

例題 2.1. 極限

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n}$$

を求めてみよう。

$\log n << n$ より、

$$\lim_{n\to\infty} \log(n^{1/n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$$

となる。

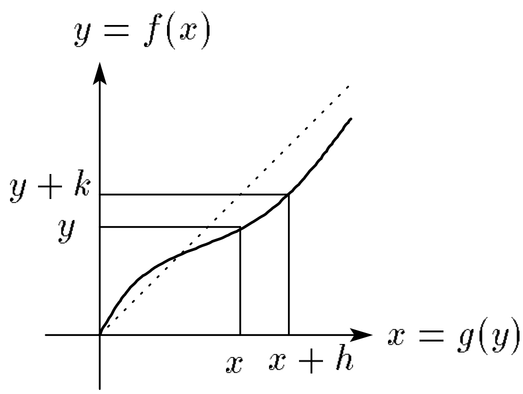
問 8. 極限

$$\lim_{x \to +0} x^x$$

を求めよ。

3 逆三角関数

逆関数 (inverse function) の復習（縦のものを横に見る）。$y = f(x)$ の



逆関数 g は、$x = g(y)$ という関係をみたす。すなわち、

$$g(f(x)) = x, \qquad f(g(y)) = y$$

が恒等的に成り立つ。$f(x)$ として $\sin x$ $(-\pi/2 \leq x \leq \pi/2)$, $\cos x$ $(0 \leq x \leq \pi)$, $\tan x$ $(-\pi/2 < x < \pi/2)$ を考えた場合の逆関数を記号

$$\arcsin x, \quad \arccos x, \quad \arctan x.$$

（定義域に注意）で表し、**逆三角関数**と総称する。記号の由来は弧の長さを表していることによる。（図による説明。）

逆三角関数については $\sin^{-1} x$ などの表記法も一般的であるが、$\sin^{-1} x$ は $\sin x$ の逆数 $(\sin x)^{-1}$ と紛らわしいのでここでは使わない。

問 9. 等式 $\arccos x + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$ $(0 \le x \le \pi/2)$ を図形的に示せ。

微分の公式：

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

これを導くには、一般の逆関数で考えたほうがよい。すなわち、$y = f(x)$ の逆関数を $x = g(y)$ で表すとき、

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

関数のグラフで、$y + k = f(x+h)$, $x + h = g(y+k)$ を表示して、

$$\lim_{k \to 0} \frac{g(y+k) - g(y)}{k} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{f(x+h) - f(x)} = \frac{1}{f'(x)}.$$

4 Riemann 積分

区間 $[a, b]$ で定義された関数 $f(x)$ に対して、区間を $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ と分割し、各小区間ごとに点 $\xi_j \in [x_{j-1}, xi_j]$ を勝手にとっておく。このとき、極限

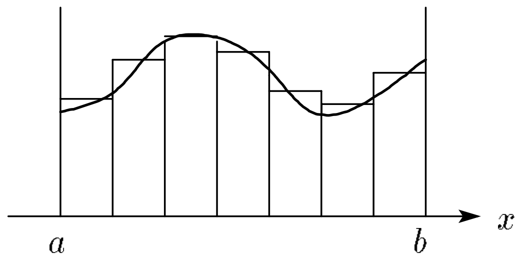
$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) f(\xi_j), \quad \Delta = \max\{x_1 - x_0, \cdots, x_n - x_{n-1}\}$$

が、分割の方法および点 ξ_j のとりかたに依存せずに一つの値に収束するとき、関数 $f(x)$ は（区間 $[a, b]$ 上で）**積分可能** (integrable) であるといい、その極限値を**積分** (integral) とよび

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

で表す。また f のことを**被積分関数** (integrand) という言い方をする。

命題 4.1 (積分の基本公式).



(i)

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

(ii)

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \qquad (a < b).$$

Remark . 変数を表すのに使う記号 x には特別の意味はない、すなわち

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy = \cdots .$$

問 10. 積分表示

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

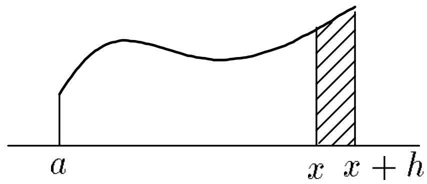
と上の積分公式を使って、対数関数の性質 $\log(xy) = \log x + \log y$ を（図形的に）示せ。

次は直感的に明らかであろうが、連続性の厳密な定義とも相俟って、実数の本質に由来する結果である。

定理 4.2. 連続関数は積分可能である。

定理 4.3 (微積分の基本定理). 関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で積分可能であるとき、

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$



ここで言葉の整理。一般に、積分

$$\int_a^b f(t)dt$$

において a, b は定数と思っているのに対して、上の定理では、b のところを変数 x に変えて、積分

$$\int_a^x f(t)dt$$

を x の関数と思っている。このように積分を使って作られる関数のことを**不定積分** (indefinite integral) と称するのに対して、範囲を固定して考えた積分を**定積分** (definite integral) と呼んで区別して使われる。

一方、$F'(x) = f(x)$ となるような関数 $F(x)$ のことを $f(x)$ の**原始関数** (primitive function) と呼ぶことにすれば、上の定理は、原始関数と不定積分が定数の違いを除いて同じものであることを主張していることになる。(微分が恒等的に零である関数は定数関数である、という、直感的には明らかな、しかしながらよく考えてみると「議論」が必要になってくる結果を使う。) 結果として、原始関数と不定積分を同じ意味で使うという慣行が出来あがった。

問 11 (意地悪問題?). 原始関数と不定積分の違いについて述べよ。

系 4.4. 関数 $f(x)$ の定積分は、$f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を使って、

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

と計算できる。

問 12. 分かりきった関係式

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt$$

を使って、微分が連続であるような関数 $f(x)$ $(a < x < b)$ に対して、

(i) $f'(x) \geq 0$ $(a < x < b)$ ならば、f は、区間 (a, b) で増加 (increasing)、

(ii) $f'(x) > 0$ $(a < x < b)$ ならば、f は、区間 (a, b) で強い意味で増加 (strictly increasing)、

であることを示せ。

微分の計算式を解釈しなおすと、積分の公式が得られる。

逆三角関数による不定積分

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a},$$
$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = a^{-1} \arctan \frac{x}{a}.$$

例題 4.5.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{4}.$$

定理 4.6.

部分積分 *(integration by parts)*

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx.$$

置換積分 *(change of variables)*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy.$$

$f(g(x))g'(x)$ の原始関数は、$f(x)$ の原始関数 $F(x)$ に $g(x)$ を代入した $F(g(x))$ で与えられる。

Remark . 部分積分の「公式」は、積の微分の公式の利用の仕方（多くは試行錯誤）を学ぶべきで、上の形の式を覚える必要はない（というか覚えるべきでない)。

置換積分の公式は、$y = g(x)$, $g'(x) = dy/dx$ という補助的な変数 y を使って、

$$\int f(y) \frac{dy}{dx} dx = \int f(y)\, dy$$

と書くと覚えやすい。ただし、積分範囲の変化の仕方に注意。

例題 4.7.

$$\int \log x \, dx$$

を「部分積分の方法」で求めてみよう。

そのために、積の微分の結果 $\log x$ という項が現れる $x \log x$ という関数の微分を書き下してみる。

$$(x \log x)' = \log x + 1.$$

次に、両辺の積分を取って、

$$x \log x = \int \log x \, dx + \int 1 \, dx$$

より、

$$\int \log x \, dx = x \log x - x$$

であることがわかる。

例題 4.8. 自然数 $n = 2, 3, \ldots$ に対して、

$$\int \frac{x}{(x^2+a^2)^n} dx = \frac{1}{2-2n} \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}.$$

問 13. 上の積分で $n = 1$ のときはどうなるか。

問 14. 不定積分

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx, \qquad \int x e^{-x^2} dx$$

を求めよ。

例題 4.9. 不定積分

$$I_n(x) = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx$$

を部分積分の方法で調べよう。

積の微分の式

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^n}\right)' &= \frac{1}{(x^2+a^2)^n} - 2n \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} \\ &= -\frac{2n-1}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2a^2 n}{(x^2+a^2)^{n+1}}\end{aligned}$$

を積分して、

$$2a^2 n I_{n+1}(x) - (2n-1) I_n(x) = \frac{x}{(x^2+a^2)^n}$$

という漸化式 (recursive relation) を得るので、

$$I_1(x) = \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$$

から出発して、$I_2(x), I_3(x), \ldots$ を次々と求めることができる。

問 15. 自然数 $n = 1, 2, \ldots$ に対して、

$$\int x^n e^x \, dx$$

を求めよ。

例題 4.10.

(i) $\displaystyle \int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} dx = \arcsin \frac{x-2}{2}.$

(ii) $\displaystyle \int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right).$

(iii)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+A}} dx = \log(x + \sqrt{x^2+A}).$$

不定積分が（原理的に）計算可能なクラスとして有理関数があり重要であるが、その「理論」を完全に把握するには、「複素変数」を避けて通ることができない（仮に避けたとしても不自然なものになる)。

ここでは、あくまでも実践的な理解ということで、手順の説明と具体的計算例にとどめよう。有理関数の不定積分は、（分母の因数分解さえ実行できれば）いつでも具体的に求めることができる、という安心感が何よりも大事かもしれない。積分計算の技巧の多くは、適当な変数変換を施すことにより、有理関数の不定積分に帰着させるというものなので。

<u>有理関数の不定積分の求め方</u>

必要に応じて、割り算を実行することにより、

$$\int \frac{g(x)}{f(x)} dx, \qquad \deg g < \deg f$$

の場合が問題である。

分母の式 $f(x)$ を（実数の範囲で）因数分解して、

$$(x^2+ax+b)^m, \qquad (x+c)^n$$

の形の積で表しておく。

このとき

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \sum \frac{p(x)}{(x^2+ax+b)^m} + \sum \frac{q(x)}{(x+c)^n}$$

という表示が可能である。ここで、$p(x)$、$q(x)$ は分母よりも次数の低い多項式を表す。

$p(x)$ を x^2+ax+b で割った商をさらに x^2+ax+b で割って、そのまた商を x^2+ax+b で割って、という操作を繰り返すことにより、$p(x)$ を

$$(\alpha x+\beta)(x^2+ax+b)^k, \qquad 0 \le k < m$$

の形の式の和で書き表せるので、結局

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+ax+b)^l} dx, \qquad 1 \le l \le m$$

の形の不定積分に帰着する。

同様に、$q(x)$ の部分も処理して、こちらは、

$$\int \frac{1}{(x+c)^l} dx = \begin{cases} \frac{1}{(1-l)(x+c)^{l-1}} & \text{if } l \neq 1, \\ \log|x+c| & \text{if } l = 1 \end{cases}$$

と簡単に求まる。

最後に、1 次式／2 次式の冪、の不定積分は、$x^2+ax+b = (x+a/2)^2 + b - a^2/4$ により、$y = x + a/2$ という変数変換を使えば、

$$\int \frac{Ay+B}{(y^2+C)^l} dx$$

の計算に還元され、これは、既に調べたように具体的に求めることができる。

例題 4.11.

$$\int \frac{1}{x^3+1} dx$$

の計算。

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ であるから、

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

とおいて、a, b, c を求めると $a=1/3, b=-1/3, c=2/3$ となるので、

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^3+1}dx&=\frac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}dx-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx\\&=\frac{1}{3}\log(x+1)-\frac{1}{3}\int\frac{2(x-1/2)-1}{(x-1/2)^2+3/4}dx\\&=\frac{1}{3}\log(x+1)-\frac{1}{3}\int\frac{1}{(x-1/2)^2+3/4}d(x-1/2)^2+\frac{1}{3}\int\frac{1}{(x-1/2)^2+3/4}dx\\&=\frac{1}{3}\log(x+1)-\frac{1}{3}\log(x^2-x+1)+2\sqrt{3}\arctan(2x/\sqrt{3}-\sqrt{3})\end{aligned}$$

という表示を得る。（こう書いたからといって何か良いことがあるのかどうか。）

問 16.

$$\int\frac{1}{x^3-1}dx, \qquad \int\frac{1}{x^4-1}dx$$

問 17.

$$\int\frac{1}{x^4+1}dx$$

を求めよ。（1 の 8 乗根が関係している。）

積分における変数変換で基本的な方法の一つに、曲線の有理関数表示がある。関数 $y=f(x)$ が、曲線のパラメータ表示 $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ で t を消去したものであれば、$x=\varphi(t)$ を変数変換とみて、

$$\int f(x)\,dx=\int y\,dx=\int\psi(t)\varphi'(t)\,dt$$

と計算できる。とくに、φ, ψ ともに t の有理関数で取れるならば、有理関数の不定積分に還元され、具体的な表示が（原理的に）可能となる。

円の場合、$x^2+y^2=1$ の有理パラメータは、円周上の点、例えば $(-1,0)$、を通る直線の傾きを取って、

$$y=t(x+1), \qquad x^2+y^2=1$$

と連立させて解くことにより、

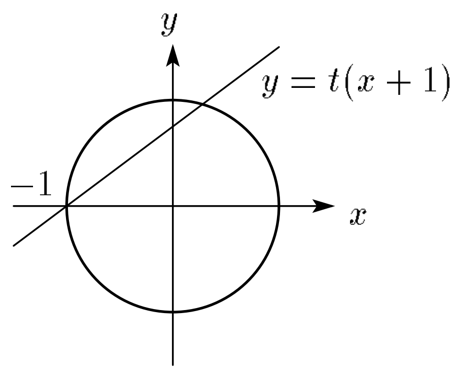
$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y = \frac{2t}{1+t^2}$$

と書き表されるので、例えば

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{1}{y}dx$$

は t の有理積分に帰着する。

また、$x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ という表示と結びつけることにより、三角関数の有理式の積分は、やはり t の有理積分を使って表せることがわかる。



同じ方法は、他の二次曲線にも有効で、例えば、$y = \sqrt{x^2-1}$ については、

$$y = t(x+1), \qquad y^2 = x^2 - 1$$

と連立させて解くと、

$$x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \qquad y = \frac{2t}{1-t^2}$$

となるので、この場合も t の有理積分に帰着する。

問 18. 不定積分

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$$

を上の方法で求めよ。

5 Taylor の公式

等比級数の公式

$$(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n) = 1-x^{n+1}$$

を書き直して

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n+\frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

さらに x を $-x$ で置き換えて

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x}.$$

積分して

$$\begin{aligned}\log(1+x) &= \int_0^x dt\,(1-t+t^2\cdots+(-1)^n t^n+(-1)^{n+1}\frac{t^{n+1}}{1+t}) \\ &= x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{n+1}+(-1)^{n+1}\int_0^x dt\,\frac{t^{n+1}}{1+t}.\end{aligned}$$

ここで最後の項は

$$\left|(-1)^{n+1}\int_0^x dt\,\frac{t^{n+1}}{1+t}\right| \le \int_0^x dt\,t^{n+1} = \frac{1}{n+2}x^{n+2}.$$

したがって、$|x|<1$ のとき

$$\log(1+x) = x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots.$$

このように、x の累乗（冪ともいう）の定数倍を一般項とする級数を x の冪級数 (power series) と称する。

例題 5.1.

$$\log(1.01) = 0.01-\frac{1}{2}(0.01)^2+r = 0.01-0.00005+r = 0.00995+r, \quad 0<r\le\frac{1}{3}(0.01)^3$$

$\log x$ を $x-1$ の冪級数であらわしたようなことを他の関数についても行う。仮に、

$$f(x) = c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots$$

が成り立ったとして、形式的に微分を n 回繰り返し、$x = a$ を代入すると、$c_n = f^{(n)}(a)/n!$ という関係式が得られるので、

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \cdots$$

という公式が期待される (C. Maclaurin)。以上の形式的な計算を厳密なものにするために

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,dt$$

が

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots$$

と似ていることに着目して、$\int_a^b f'(t)\,dt$ を次のように書き直す。まず、

$$(f'(t)(b-t))' = -f'(t) + f''(t)(b-t)$$

を積分して得られる

$$\int_a^b f'(t)dt = f'(a)(b-a) + \int_a^b f''(t)(b-t)dt$$

を最初の式に代入して

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \int_a^b f''(t)(b-t)dt.$$

さらに

$$\frac{1}{2}\left(f''(t)(b-t)^2\right)' = -f''(t)(b-t) + \frac{1}{2}f'''(t)(b-t)^2$$

を積分して得られる

$$\int_a^b f''(t)(b-t)dt = \frac{1}{2}f''(a)(b-a)^2 + \frac{1}{2}\int_a^b f'''(t)(b-t)^2 dt$$

を 2 番目の近似式に代入して

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2}f''(a)(b-a)^2 + \frac{1}{2}\int_a^b f'''(t)(b-t)^2 dt.$$

以下、帰納的に

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(b-a)^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b f^{(n)}(t)(b-t)^{n-1}dt$$

を仮定して、これに

$$\frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(t)(b-t)^n\right)' = -\frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(b-t)^{n-1} + \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t)(b-t)^n$$

を積分して得られる

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_a^b f^{(n)}(t)(b-t)^{n-1}dt = \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(b-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n dt$$

を代入して次の公式が得られる。

定理 5.2 (Johann Bernoulli の公式). 関数 $f(x)$ は、何回でも微分できるものとすると、

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(b-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n dt$$

が成り立つ。（最後の積分が入った項を剰余項 *(remainder)* と呼ぶ。）

従って、関数 $f(x)$ の冪級数表示を得ようと思ったら、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = 0$$

を示せばよい。こうして得られる冪級数展開を Taylor-Maclaurin 展開（略して Taylor 展開, Taylor expansion）と呼ぶ。

Remark . 関数の冪級数展開（いわゆるテーラー展開）の歴史に関しては、様々な数学者が寄与しているようで、正確な評価は難しい。

上で示した基本的な微分・積分公式は、Johann Bernoulli によるもので、これが以外にも最も古いらしい。次いで、B. Taylor が Newton 伝来の補間法による考察から、補間点を一点に縮めた極限として、今日の Taylor 級数に相当するものを得、さらに年が下って、C. Maclaulin は、関数の冪級数展開という観点から、その係数と高次導関数の値とを結びつける議論を展開したようである。

一方、具体的な関数の冪級数展開については、オイラー・ベルヌーイの周辺では早くから「常識」であったようで、導出過程はどうあれ、本来はこの辺りに敬意を表すべき成果のようである。大陸とイギリスとの関係とかも背景にはあるのであろう。

そういった諸々の経緯を踏まえた上で、ここでは、敢えて簡単に「テーラー展開」といって済ませることにする。

問 19. 連続関数 g に対して、

$$\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x g(t)(x-t)^{n-1}dt = g(x)$$

である。何故か。

例題 5.3.

(i) $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}xn + \cdots$.

(ii) $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots$.

(iii) $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots$.

(iv) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots \ (|x| < 1)$.

Proof. もっとも面倒な (iv) を示そう。剰余項は、

$$\frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{1}{n!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)\int_0^x (1+t)^{\alpha-n-1}(x-t)^n dt$$

の形である。まず、$x > 0$ とする。十分大きな n については $\alpha - n - 1 \leq 0$ なので

$$\begin{aligned}\int_0^x (1+t)^{\alpha-n-1}(x-t)^n dt &\leq \int_0^x (x-t)^n dt \\ &= \int_0^x t^n dt \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1}.\end{aligned}$$

次に、$x < 0$ のときは、

$$\left|\int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{\alpha-1}dt\right| = \int_0^{|x|}\left(\frac{|x|-t}{1-t}\right)^n (1-t)^{\alpha-1}dt$$

で、$\sup\{(|x|-t)/(1-t); 0 \leq t \leq |x|\} = |x|$ を使うと、

$$\int_0^{|x|}\left(\frac{|x|-t}{1-t}\right)^n (1-t)^{\alpha-1}dt \leq |x|^n \int_0^{|x|}(1-t)^{\alpha-1}dt$$

より、何れの場合も

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^n$$

が、$n \to \infty$ のとき、0 に近づくことが確かめられればよい。

これを扱うには α の正負で場合を分ける必要がある。例えば、$\alpha > 0$ の時には、$l-1 < \alpha \leq l$ なる自然数 l を取ってきて

$$\begin{aligned}\frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{n!} &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-l+1)(l-\alpha)\cdots(n-\alpha)}{n!} \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-l+1)}{n}\frac{l-\alpha}{l}\cdots\frac{n-\alpha}{n}\frac{1}{(l-1)!} \\ &\leq \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-l+1)}{(l-1)!}.\end{aligned}$$

一方、$\alpha < 0$ の時には、$-l \leq \alpha < -l+1$ なる自然数 l を取ってきて

$$\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+l)}{(l-1)!}\frac{-\alpha}{l}\frac{1-\alpha}{l+1}\cdots\frac{n-\alpha}{n+l} \leq \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+l)}{(l-1)!}$$

と評価すれば、$n \to \infty$ のときの

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}$$

の増大度のスピードが n について多項式程度であるのに比して、$|x|^n$ の減少度のスピードの方が勝り（$|x| < 1$ に注意して $|x| = e^{-a}$ と置いてみる）、求める結論を得る。 □

Remark . べき乗のテーラー展開の証明については、べき級数の理論を展開した上で、微分方程式の解の一意性に訴えるのが最も簡明である。

問 20. テーラー展開を利用して、e の値を小数点以下 5 桁まで正確に求めよ。

例題 5.4. $2^{10} = 1024$ を利用して、

$$\sqrt{1000} = \sqrt{1024-24} = 2^5\sqrt{1-\frac{24}{1024}} = 32\left(1-\frac{1}{2}\frac{24}{1024}+\dots\right)$$

と計算してみる。

問 21. 2 の 3 乗根を小数点以下 2 桁まで正確に求めよ。（このような数値計算のためには、Newton 法などのより効率的な方法もある。）

例題 5.5. 関数 $\log(1+\sin x)$ のテーラー展開を x の3次の項まで求めよう思ったら、直接テーラーの公式を計算するよりは、

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \dots$$

に

$$y = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

を代入して、x の冪の低い順に係数をまとめて、

$$\begin{aligned}\log(1+\sin x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \dots\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + \dots\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6} + \dots\right)^3 + \dots \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)x^3 + \dots\end{aligned}$$

と計算するのが効率的である。

問 22. 関数 $\sqrt{\cos x}$ のテーラー展開を x^4 の項まで求めよ。また関数 $\dfrac{m}{\sqrt{1-v^2}}$ のテーラー展開を v の2次の項まで求めよ。

問 23. 関数 $1/\cos x$ のテーラー展開を x について4次の項まで求めよ。またこれを利用して、$\tan x$ のテーラー展開を x の5次の項まで求めよ。

<u>無限小のスピード</u>

関数の増大度のスピードを比較したときのように、無限小のスピードの比較を行うことができる。$\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x)$ となる2つの関数 $f(x)$, $g(x)$ が

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

をみたすとき、$f(x)$ は $g(x)$ よりも**高位の無限小** (infinitesimal of higher order) であるといい、

$$f(x) = o(g(x))$$

という表し方をする（**Landau の記号**）。例えば、

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \dots + (-1)^n \frac{1}{n}x^n + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt$$

で、最後の項は $|x| < 1$ のとき、

$$\left|\int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt\right| \le \frac{1}{1-|x|}\int_0^{|x|} t^n\,dt = \frac{1}{n+1}\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}$$

なので
$$\lim_{x\to 0}\frac{(-1)^n\int_0^x dt\, t^n/(1+t)}{x^n}=0$$
が成り立ち、従って
$$\log(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2-\cdots-(-1)^n\frac{1}{n}x^n=o(x^n)$$
あるいは
$$\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n}x^n+o(x^n)$$
であることがわかる。

同様にして、
$$\begin{aligned}
e^x &= 1+x+\frac{1}{2}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)\\
\sin x &= x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})\\
\cos x &= 1-\frac{1}{2}x^2+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n})\\
(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+o(x^2)
\end{aligned}$$
が成り立つ。

例題 5.6. 極限
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$$
を求めよ。

Proof.
$$\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\frac{1-(1-x^2/2+\cdots)}{x(x-x^3/3!+\cdots)}=\frac{x^2/2-x^4/4!+\cdots}{x^2-x^4/3!+\cdots}\to\frac{1}{2}.$$
□

例題 5.7.
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=e^a.$$

Proof. 対数の極限値を調べる。

$$\begin{aligned} n\log\left(1+\frac{a}{n}\right) &= n(\frac{a}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{n}\right)^2+\cdots) \\ &= a+\frac{1}{2}\frac{a^2}{n}+\cdots \\ &\to a. \end{aligned}$$

□

上の２つの例題を組み合わせた次のような問題はどうであろうか。

例題 5.8. 極限

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x\sin x}$$

を求めよ。

Proof.

$$\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+\cdots, \quad x\sin x = x^2-\frac{1}{3!}x^4+\cdots$$

であるから、

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x\sin x} = \lim_{x\to 0}\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)^{1/x^2} = e^{-1/2}.$$

□

例題 5.9. 上の例題の結果から、

$$\lim_{n\to\infty}((1+1/n)^n-e)=0$$

であるが、この左辺の量の 0 に近づくスピードはどうであろうか。

Proof. 以前と同様の考えで、

$$\log(1+1/n)^n = n\log(1+1/n) = 1-\frac{1}{2}\frac{1}{n}+\frac{1}{3}\frac{1}{n^2}+\cdots$$

であるから、

$$\begin{aligned} e^{-1}(1+1/n)^n-1 &= e^{-1/2n+1/3n^2+\cdots}-1 \\ &= \left(-1/2n+1/3n^2+\cdots\right)+\frac{1}{2}\left(-1/2n+1/3n^2+\cdots\right)^2 \\ &\quad +\frac{1}{3!}\left(-1/2n+1/3n^2+\cdots\right)^3+\cdots \\ &= -\frac{1}{2n}+\frac{11}{24}\frac{1}{n^2}+\cdots \end{aligned}$$

となって、$(1+1/n)^n - e$ の 0 に近づくスピードは、$-e/2n$ と同じであることがわかる。従って、

$$\lim_{n\to\infty} n((1+1/n)^n - e) = -\frac{e}{2}$$

である。 □

問 24. Napier の数 e の定義として、上の極限式

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

を採用している教科書も多いが、e の計算式としては、効率が悪い。上の例題を参考に、誤差の評価を行って、小数点以下５桁まで正確に求めようと思ったら、n をどの程度大きくしないといけないか調べよ。またテーラー展開を使った場合と比較せよ。

問 25. $\lim_{x\to+\infty}\arctan x = \pi/2$ であるが、この極限の収束のスピードを調べるために、

$$\frac{\pi}{2} - \arctan x$$

を $1/x$ の冪級数の形に展開し、$1/x$ の３次の項まで求めよ。

6　広義積分

積分

$$\int_0^1 x^{-1/2}\,dx, \quad \int_1^\infty x^{-2}\,dx$$

のように積分される関数が有限の範囲になかったり、積分する範囲が有限でない場合も、その値を考えることができて、それぞれの図形の面積を表すと解釈することが可能である。こういった種類の積分をとくに強調して異常積分とか広義積分（improper integrals）と呼ぶことが多いが、これらもまっとうな積分である。

より一般的に次が成り立つ。

例題 6.1.

$$\int_0^1 x^{-\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{if } 0 < \alpha < 1, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\int_1^\infty x^{-\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{if } \alpha > 1, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

問 26. 正数 $\alpha > 0$ に対して、

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx$$

を求めよ。

例題 6.2. 積分

$$\int_0^1 \log x\,dx$$

の値を求めてみよう。

まず、$y = \log x$ のグラフを描いてみて、この積分は $x = 0$ の点で広義積分になっていることを確認する。積分の値そのものは、$\log x$ の原始関数が $x\log x - x$ であることに注意すれば、

$$\int_0^1 \log x\,dx = [x\log x - x]_0^1 = -1$$

と求まるのであるが、この最後の計算で、$x = 0$ を $x\log x$ に代入するところは吟味が必要である。というのは、$\log x$ の値は $x = 0$ で発散しているので、

$$x\log x\Big|_{x=0}$$

は、$0 \times \infty$ 型の「不定形」になっている。

この部分を正しく処理するには、いきなり $x = 0$ を代入せずに、まずは、$x = a > 0$ を代入しその後、$a \to 0$ を計算する。ということで、極限

$$\lim_{a\to+0} a\log a$$

が問題になるが、これは、$a = 1/t$ とでもおいて、$t \to +\infty$ という極限に書きなおすと、

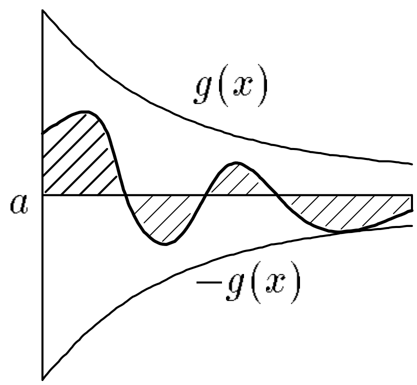
$$a\log a = -\frac{\log t}{t} \to 0$$

$(\log t << t)$ であることがわかるので、上の計算が正当化された。（答案としては、ここまで書かないといけない。）

問 27. 次の計算の誤りを見つける。

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{x=-1}^{x=1} = -2.$$

関数（のグラフ）を正の部分と負の部分の和に書いて、それぞれの部分の面積を比較すると次の結果となる。



定理 6.3 (広義積分の存在).

(i)

$$|f(x)| \leq g(x), \quad 0 \leq x \leq a$$

が成り立つとき、$\int_0^a g(x)dx < +\infty$ ならば

$$\int_0^a f(x)\,dx$$

が存在する。

(ii)

$$|f(x)| \leq g(x), \quad x \geq a > 0$$

が成り立つとき、$\int_a^{+\infty} g(x)dx < +\infty$ ならば

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

が存在する。

例題 6.4. 広義積分

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

が存在することを確かめその値を求めよ。

Proof. まず積分が存在すること。関数 $x^n e^{-x/2}$ は $x \geq 0$ で有界なので、

$$x^n e^{-x} \leq M e^{-x/2}, \qquad x \geq 0$$

となる定数 $M > 0$ が存在し、定理の判定条件が使える。

積分の値は、部分積分から得られる漸化式

$$I_{n+1} = (n+1) I_n, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

と

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$$

を使って

$$I_n = n!$$

であることがわかる。 □

例題 6.5. 広義積分

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

の存在を確かめよ。

Proof. これは、$x \geq 1$ のとき $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ であることに注意して、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x^2} dx &= \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^\infty e^{-x^2} dx \\ &\leq \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^\infty e^{-x} dx < +\infty \end{aligned}$$

よりわかる。 □

例題 6.6 (Γ 関数). $x > 0$ のとき、

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

が存在して $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\Gamma(1) = 1$. とくに、$\Gamma(n+1) = n!$.

Proof. 存在は、
$$\int_0^\infty dt = \int_0^1 + \int_1^\infty dt$$
と分けて考える。

関数等式は、部分積分によりわかる。 □

例題 6.7.
$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$
実は、左辺の積分値（**ガウス積分**）は $\sqrt{\pi}/2$ であることがわかるので（「微積分 II」の重積分の項参照)、$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ となっている。

問 28. 広義積分
$$\int_0^\infty \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) dx$$
が収束するか発散するかを調べよ。

7　高次の微分と関数のグラフ

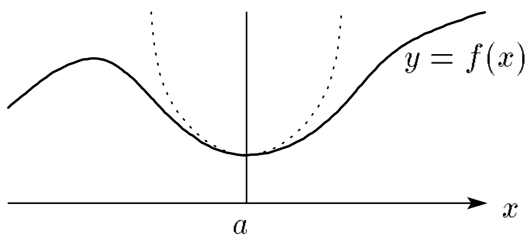
よく知られているように、関数の微分の幾何学的意味は、接線の傾きであり、このことから、$f'(a)$ の符号が正であるか負であるかに応じて、$f(x)$ は $x = a$ の付近で増加あるいは減少の傾向にあることがわかる。

一方、$f'(a) = 0$ となる点での様子は、これだけからは判断できないので、いわゆる 2 次の近似式
$$f(x) = f(a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$$
を使って、$f''(a) \neq 0$ であれば、右辺の 2 次関数と同じような振る舞いであることがわかる。すなわち、$f''(a)$ の正負に応じて、$x = a$ の付近で関数の値は、最小あるいは最大になっている。これは、$x = a$ の付近に限定した上での最大・最小なので、定義域全体を通しての最大・最小と区別して、**極大・極小** (local maximum, local minimum) という言い方をする。また、$|f''(a)|$ が山（または谷）の開き具合を表す。($|f''(a)|$ が大きいほど山は険しく谷は深くなる。)

問 29. ガンマ積分の被積分関数

$$x^{a-1}e^{-x}$$

のピークの開き具合がパラメータ a の増加とともにどのように変化するか調べよ。

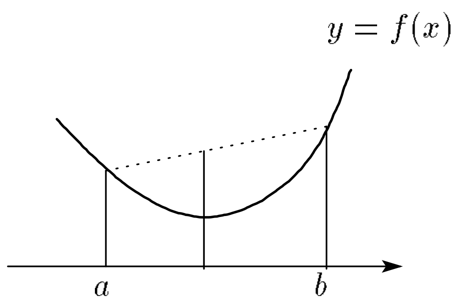


一般に、ある区間で $f''(x) \geq 0$ が成り立っていれば、接線の傾き $f'(x)$ は x の増加関数（正確には、非減少関数）となるので、$f(x)$ のグラフは、下に凸になっている。

これをもう少し数学的に正確に述べよう。まず、ある区間で関数 f（のグラフ）が（下に）凸であるとは、区間内の勝手な 2 点 a, b に対して

$$f((1-t)a+tb) \leq (1-t)f(a)+tf(b), \qquad 0 \leq t \leq 1$$

という不等式が成り立つことと定義する。



このとき、次が成り立つ。

命題 7.1. 関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ を含むある範囲で定義されていて、2 階微分可能で $f''(x)$ が連続かつ $f''(x) \geq 0$ $(a \leq x \leq b)$ であれば、上の不

等式が成り立つ。より強く、$t_1, \ldots, t_n$ という確率分布（すなわち、$t_j \geq 0$ かつ $\sum_j t_j = 1$）と数列 $\{c_j\}_{j=1}^n \subset [a, b]$ に対して、

$$f\left(\sum_{j=1}^n t_j c_j\right) \leq \sum_{j=1}^n t_j f(c_j)$$

(Jensen の不等式) が成り立つ。

Proof. Taylor の公式

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \int_c^x f''(t)(x-t)\,dt$$

で $f''(t) \geq 0$ に注意すれば、

$$f(x) \geq f(c) + f'(c)(x-c)$$

という不等式が $a \leq c, x \leq b$ である限り成り立つことがわかる。そこで、$x = c_j$, $c = \sum t_j c_j$ とおくと、

$$f(c_j) \geq f(c) + f'(c)(c_j - c)$$

となり、この両辺に t_j を掛けて j について和をとると、

$$\sum_j t_j f(c_j) \geq f(c) + f'(c) \sum_j t_j (c_j - c) = f(c)$$

となる。 □

問 30. 上の証明の中で示した不等式

$$f(x) \geq f(c) + f'(c)(x-c)$$

を幾何学的に解釈せよ。

例題 7.2. 二つの確率分布 $p = \{p_j\}_{1 \leq j \leq n}$, $q = \{q_j\}_{1 \leq j \leq n}$（ただし、$p_j > 0$, $q_j > 0$ とする）に対して、その相対エントロピー (relative entropy) を、

$$H(p, q) = \sum_{j=1}^n p_j \log \frac{p_j}{q_j}$$

で定めるとき、$\log x$ が凸関数であることに注意すれば、

$$-H(p, q) = \sum p_j \log \frac{q_j}{p_j} \leq \log\left(\sum_{j=1}^n p_j \frac{q_j}{p_j}\right) = \log 1 = 0$$

であることがわかる。

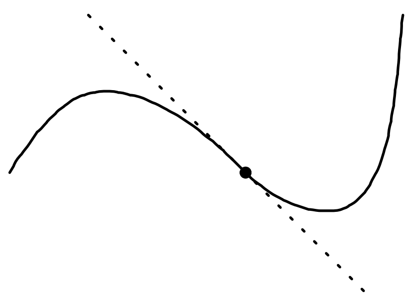
関数のグラフの図形的な性質をさらに調べるために、$f(x)$ は、$f''(x)$ が存在して連続であると仮定して、$f''(x) = 0$ となる点 c の前後で $f''(x)$ の符号が変わるものとしよう。具体的に考えるために、

$$\begin{cases} f(x) < 0 & \text{if } x < c, \\ f(x) > 0 & \text{if } x > c \end{cases}$$

であったとする。

このとき、関数 $f(x)$ のグラフは、$x < c$ の範囲で（下に）凹、$x > c$ の範囲で（下に）凸となるので、$x = c$ の点で、グラフの凹凸が変化することがわかる。

こうのように凹凸の変化する点を**変曲点** (point of inflection) と呼ぶ。



系 7.3. 関数 $f(x)$ は、$f''(c) = 0$ かつ $x = c$ の前後で $f''(x)$ の符号が変化すれば、そのグラフは、$(c, f(c))$ を変曲点にもつ。

例題 7.4. 関数 $f(x) = x^3$ のグラフは $x = 0$ で変曲している。

例題 7.5. 関数 $f(x) = e^{-x^2/2\sigma^2}$ のグラフは、

$$f'''(x) = e^{-x^2/2\sigma^2}\frac{x^2 - \sigma^2}{\sigma^4}$$

より、$|x| < \sigma$ で上に凸、$|x| > \sigma$ で下に凸であり、$x = \pm\sigma$ が変曲点である。

問 31. 関数 $y = f(x)$ は、$f''(c) = 0$ かつ $f'''(c) \neq 0$ であるとき、$x = c$ を変曲点にもつことを示せ。

8　ガンマ関数の漸近展開

ガンマ関数が階乗を補完していることからもわかるように、

$$\lim_{t\to+\infty}\Gamma(t)=+\infty$$

であるが、その増大度のスピードはどうであろうか。

まず、ガンマ関数の定義式における被積分関数は、$x=t-1$ でただ一つのピークをもち、x の増大とともに値が急激に減少する（0 に近づく）。$t\to+\infty$ のとき、ピークの位置が無限のかなたに移動してしまうので、$x=(t-1)u$ なる変数変換を施して、積分範囲を固定したままピークの位置がいつでも $u=1$ であるように書きなおし、さらに u に無関係な部分を括り出すと、

$$\Gamma(t+1)=t^{t+1}e^{-t}\int_0^{+\infty}u^te^{t-tu}du.$$

関数 $g(u)=u^te^{t-tu}$ の $u=1$ の付近での様子を調べるために、$\log g(u)$ を $u=1$ のまわりで Taylor 展開すると、

$$\log g(u)=t(\log u-u+1)=-\frac{t}{2}(u-1)^2+\frac{t}{3}(u-1)^3+\dots.$$

これから、大きい t に対するピークの幅の目安として、

$$1-\frac{1}{\sqrt{t}}<u<1+\frac{1}{\sqrt{t}}$$

を得るので、$t\to+\infty$ のとき、積分の値はピークの極狭い範囲からの寄与だけで良い近似が得られるであろう。

そこで、ピークを幅 $0<\epsilon<1$ の範囲で取り出して、

$$\int_0^{+\infty}g(u)du\fallingdotseq\int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon}e^{-t(u-1)^2/2}du=\frac{1}{\sqrt{t}}\int_{-\epsilon\sqrt{t}}^{\epsilon\sqrt{t}}e^{-x^2/2}dx$$

に注意すれば、

$$t^{-t-1/2}e^t\Gamma(t)\fallingdotseq\int_{-\epsilon\sqrt{t}}^{\epsilon\sqrt{t}}e^{-x^2/2}dx\to\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2/2}dx=\sqrt{2\pi}$$

という公式が得られた。とくに、

$$n!\sim\sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}$$

（**Stirling の公式**）である。

以上の議論は大筋では正しいのであるが細部で不正確である。それは、近似式

$$\Gamma(t+1) \fallingdotseq t^{t+1}e^{-t}\int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} e^{-t(x-1)^2/2}dx$$

で落とした項が $t \to +\infty$ ではたして 0 にいくかどうかの吟味に欠けるため。

ここでは次のような工夫を行う。本体の積分で、変数を -1 だけずらすと

$$\int_0^{+\infty} u^t e^{t-tu}\,du = \int_{-1}^{+\infty} e^{-t(x-\log(1+x))}dx$$

である。ここで、

$$y = \begin{cases} \sqrt{x-\log(1+x)} & \text{if } x \geq 0, \\ -\sqrt{x-\log(1+x)} & \text{if } -1 < x \leq 0 \end{cases}$$

なる変数変換を導入すれば、$x \to y$, $y \to x$ ともに微分可能（実は x の解析関数）であり、

$$\int_{-1}^{+\infty} e^{-t(x-\log(1+x))}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ty^2}\frac{dx}{dy}dy$$

となる。

関係式 $y^2 = x - \log(1+x)$ を x で微分すると、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2(1+x)}\frac{1}{y} \quad = \frac{|x|}{2(1+x)\sqrt{x-\log(1+x)}} > 0$$

であるから、

$$\lim_{y\to-\infty}\frac{dx}{dy} = \lim_{x\to-1}\frac{2(1+x)\sqrt{x-\log(1+x)}}{|x|} = 0,$$
$$\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\frac{dx}{dy} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2(1+x)}{x} = 2$$

となっていることに注意。

さて、こうして得られた積分表示において、$t \to +\infty$ での振る舞いを調べるために、$g(y) = \frac{dx}{dy}$ とおいてさらに変数変換 $z = \sqrt{t}y$ を行うと、

$$\int_0^{+\infty} u^t e^{t-tu}\,du = \frac{1}{\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} g\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right)\,dz$$

となって

$$\lim_{t\to+\infty}\sqrt{t}\int_0^{+\infty}u^t e^{t-tu}\,du=\lim_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}g\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right)dz=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}g(0)\,dz=\sqrt{\pi}g(0)$$

がわかる。最後の等号ではガウス積分の公式を使った。(実は、2 番目の等号で、$g(y)=\frac{dx}{dy}$ の増大度が多項式式程度であることを使う。)

最後に、$|x|<1$ のとき、

$$y=\pm\sqrt{x-(x-x^2/2+x^3/3-\dots)}=\frac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{2}{3}x+\dots}$$

に注意して、

$$g(0)=\frac{1}{\frac{dy}{dx}(0)}==\sqrt{2}(1+x)\sqrt{1-\frac{2}{3}x+\dots}\Bigg|_{x=0}=\sqrt{2}$$

であることがわかるので、公式が示された。

さらに詳しい情報を得るには、

$$g\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right)=g(0)+g'(0)\frac{z}{\sqrt{t}}+\frac{1}{2}g''(0)\frac{z^2}{t}+\dots$$

と冪級数展開し、

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}z\,dz=0,\qquad\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}z^2\,dz=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

などに注意すれば、

$$\sqrt{t}\int_0^{\infty}u^t e^{t-tu}du=\sqrt{\pi}\left(g(0)+\frac{g''(0)}{4}\frac{1}{t}+\dots\right)$$

と漸近展開 (asymptotic expansion) される。具体的な係数の値は、

$$x=\sqrt{2}y+\frac{2}{3}y^2+\frac{\sqrt{2}}{18}y^3+\dots$$

を使えば、

$$g(0)=\sqrt{2},\quad g''(0)=\frac{\sqrt{2}}{3},\dots$$

と求めることができる。

問 32. 関係式

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \dots}$$

を x について解くと、

$$x = \sqrt{2}y + \frac{2}{3}y^2 + \frac{\sqrt{2}}{18}y^3 + \dots$$

となることを示せ。（ヒント：$x = ay + by^2 + cy^3 + \dots$ とおいて、関係式に代入し、y の冪の係数を比較する。）